UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Zentrum zur Förderung des mathematisch-
naturwissenschaftlichen Unterrichts

Stochastik in der Realschule

Handreichung für Multiplikatoren an bayerischen Realschulen

Gliederung

1. Einführung

„Stochastik“ (von griech. stochasmos: „Vermutung“) ist ein Sammelbegriff für Wahrscheinlichkeitsrechnung (einschl. Kombinatorik) und Statistik.

1.1 Warum Stochastik in der Schule?

- Alltagsrelevantes Wissen: Die Wirklichkeit umfasst deterministisch wie auch nicht deterministische Phänomene.

  „Wenn eine der Grundaufgaben allgemein bildender Schulen darin besteht, menschliches Verhalten bewusst zu machen, dann kann man an dem Aspekt des ‚Zufalls im Leben' nicht vorbeigehen.“ (H. Winter)

  Beispiele: Würfelspiele, Lotterie, Stichproben, Prognosen aufgrund statistischer Daten, Testverfahren in Medizin, Konzeption von Versicherungen, ...
  Stochastik ist ein „Musterbeispiel für wirklichkeitsnahe beziehungshaltige Mathematik“ (H. Freudenthal).

- Experimenteller Charakter der Stochastik: Die Schüler können mathematische Resultate durch eigenständiges Experimentieren entdecken.

- Problemstellungen aus der Stochastik sind oft anschaulich vermittelbar und leicht verstehbar. Sie treffen das Interesse vieler Kinder und bewirken intrinsische Motivation.

- Training von Problemlösestrategien: Die Stochastik stellt „für die Pflege der Heuristik und des Exemplarischen im Unterricht eine nahezu unerschöpfliche Quelle dar.“ (M. Jeger)

- Modellbildung wird als typische Arbeitsweise der Mathematik an vielen Stellen deutlich. „Für die Lösung von stochastischen Problemen ist es entscheidend, die richtigen Modellvorstellungen zu entwickeln. Die Modellierung zufallsabhängiger Phänomene in der Sprache der Mathematik, also die Beschreibung durch ein System mathematischer Begriffe und Beziehungen, ist ein wesentlicher Aspekt der Stochastik. Erst durch eine solche Modellbildung können die Probleme berechenbar gemacht werden. (L. Hefendehl-Hebeker)
  Es zeigt sich, dass „verschiedenartigste“ Probleme die gleiche formale Struktur besitzen und durch das gleiche Modell beschrieben werden können (z.B. Zählprinzip).

- Stochastik ist eine ideenreiche, an substantiellen Erkenntnissen reiche Theorie, die die Gesamtheit der im Mathematikunterricht vermittelten Kenntnisse und Denkfähigkeiten bereichert.

- Vernetzungen zu anderen Gebieten der Schulmathematik: Zählen, Brüche, Prozentrechnung, Mengen, Geometrie, Funktionen, ...

- Stochastik ermöglicht vielfältige Einblicke in die Entwicklungsgeschichte der Mathematik (z.B. ausgehend von historisch bedeutsamen, stochastischen Problemen).

1.2 Stochastik im Lehrplan der Grundschule

Der aktuelle Grundschullehrplan sieht bereits für die 2., 3. und 4. Jahrgangsstufe Grunderfahrungen mit Phänomenen der Stochastik vor.

Kombinatorik

2.4.2: - Aufgaben zur Kombinatorik

z. B. verschieden farbige Häuserfronten und Dächer kombinieren
leistungsschwächere Schüler: einige Möglichkeiten durch Probieren finden (Handeln, Zeichnen)
leistungsstärkere Schüler: alle Möglichkeiten durch Probieren finden (Handeln, Zeichnen); eine systematische Vorgehensweise entwickeln; den gefundenen Möglichkeiten eine Multiplikationsaufgabe zuordnen

3.4.2: - Aufgaben zur Kombinatorik

z. B. Kombinationsmöglichkeiten von Zahlenschlössern

Wahrscheinlichkeit

3.4.2: - Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

z. B. ein Würfel mit Farbflächen in unterschiedlicher Häufigkeit; Glücksräder mit unterschiedlich großen Feldern

Statistik

2.4.2: - Informationen aus einfachen Tabellen und einfachen Schaubildern entnehmen und versprachlichen

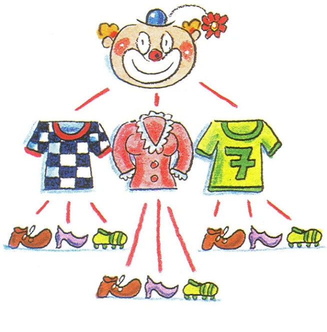
- Tabellen anlegen

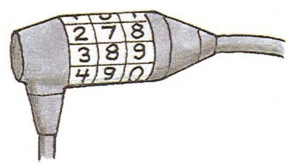
Daten von Sachsituationen in eine Tabelle eintragen und versprachlichen

4.4.2: - Informationen aus komplexen Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnehmen und versprachlichen

statistische Aufgaben, z.B.: Wie viele Kinder werden mit dem Auto in die Schule gebracht? Welche Strecke wird dabei täglich insgesamt zurückgelegt?

aus: Zahlenzauber 3, Bayern, Oldenbourg





aus: Jo-Jo 3, Bayern, Cornelsen

1.3 Stochastik in den Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Die von der Kultusministerkonferenz am 04.12.2003 beschlossenen Bildungsstandards legen fest, welche Kompetenzen Schüler mit dem Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik erworben haben sollen. Die Kompetenzen sind gegliedert in:

Allgemeine mathematische Kompetenzen
- mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- mathematisch modellieren
- mathematische Darstellungen verwenden
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- kommunizieren

Inhaltliche mathematische Kompetenzen, gegliedert nach den Leitideen
- Zahl
- Messen
- Raum und Form
- Funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall.

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden von Schülerinnen und Schülern in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben.
Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind nach Leitideen geordnet. Leitideen vereinigen Inhalte verschiedener Jahrgangsstufen und durchziehen ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Sie stellen „rote Fäden“ der Schulmathematik dar.

Unter der Leitidee „Daten und Zufall“ sind aufgeführt:

(L 5) Leitidee Daten und Zufall
Die Schülerinnen und Schüler
- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.

2. Systematisches Abzählen: Das Zählprinzip

Anknüpfend an das Rechnen mit natürlichen Zahlen bietet sich in der 5. Jahrgangsstufe die Bearbeitung von Sachsituationen an, die systematisches Abzählen von verschiedenen Möglichkeiten erfordern. Es geht insbesondere darum, ein tiefes Verständnis für das Zählprinzip zu erzeugen.

Lehrplan RS
M 5.8
Bei der Beschäftigung mit einfachen Zufallsexperimenten lernen die Schüler das Zählprinzip mit Hilfe von Baumdiagrammen kennen.
- Anbahnen des Abzählens mit Hilfe von Baumdiagrammen

Aufgabe

Auf wie viele Arten können sich drei Schüler für ein Foto nebeneinander stellen?

Zugangswege:

- Drei Schüler führen alle möglichen Aufstellungen vor.
- Lösung eines isomorphen Problems: Auf wie viele Arten kann man drei verschiedene Stifte nebeneinander legen?
- Graphische Darstellungen: Verschiedenfarbige Strichmännchen nebeneinander zeichnen.
- Symbolische Darstellungen: Anfangsbuchstaben der Vornamen nebeneinander schreiben.
- Baumdiagramm

Verallgemeinerung

Auf wie viele Arten können sich vier Schüler für ein Foto nebeneinander stellen?

Welche der obigen Zugangswege sind hier noch zweckmäßig?

Wie viele Möglichkeiten gibt es bei fünf, sechs, ... Schülern?

Bearbeitung isomorpher Probleme

Du hast einen blauen, einen roten und einen gelben Legostein. Wie viele verschiedene Türme aus drei Steinen kannst du damit bauen?

Du nimmst noch einen grünen Baustein dazu. Wie viele Türme aus vier Steinen gibt es damit?

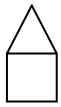
Laura möchte ihr Deutsch-, Englisch- und Mathematikbuch nebeneinander ins Bücherregal stellen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sie noch ihr Erdkunde- und ihr Religionsbuch dazunimmt?

Durch das Bearbeiten gleichartiger Probleme zeigen sich die den Situationen gemeinsamen mathematischen Strukturen.
Es geht dabei ausdrücklich nicht darum, systematisch Kombinatorik zu betreiben („mit/ohne Wiederholungen“ bzw. „mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“).
Vielmehr ist das Ziel, das Zählprinzip tief im Verständnis der Schüler zu verankern. Erwachsenen fallen selbst strukturell einfache kombinatorische Fragen schwer, wenn sie nicht in ihrer Kindheit die nötige Einsicht in das Zählprinzip gewonnen haben.

Strukturelle Weiterführung

Material: je ein blaues, rotes und gelbes quadratisches Plättchen bzw. dreieckiges Plättchen.

Wie viele Häuserfronten kannst du damit legen?



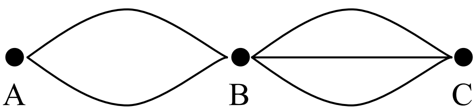
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du noch ein grünes Quadrat oder ein grünes Dreieck dazunimmst?

Zugangswege:

- Figuren legen, ausprobieren
- Zeichnungen anfertigen
- Baumdiagramm

Entwicklung einer systematischen Vorgehensweise, Zuordnung einer Multiplikation.

Isomorphe Probleme



Wie viele Möglichkeiten gibt es, um auf den gezeichneten Wegen vom Ort A zum Ort C zu gelangen?

Zugangswege:

- Wege auf den Boden zeichnen und selbst gehen
- Zeichnungen anfertigen
- Baumdiagramm

Du hast in deinem Kleiderschrank fünf Pullover und drei Hosen. Auf wie viele Arten kannst du dich damit anziehen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit der nebenstehenden Speisekarte ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Nachspeise zusammenzustellen?

Speisekarte

Tomatensuppe
Lauchcremesuppe

* * * * *

Schnitzel mit Pommes Frites
Hähnchen mit Reis
Spaghetti Bolognese

* * * * *

Eis
Obstsalat
Kuchen

Ein kurzer Ausflug in die Psychologie

Der amerikanische Psychologe Jerome Bruner unterscheidet drei Ebenen, auf denen der Mensch seine Umwelt erschließen kann und die damit auch für Lernen in der Schule von fundamentaler Bedeutung sind:

Darstellungsebenen nach J. Bruner	
enaktive Ebene	Sachverhalte werden durch Handlungen mit konkreten Objekten erfasst.
ikonische Ebene	Sachverhalte werden durch Bilder und Grafiken erfasst.
symbolische Ebene	Sachverhalte werden durch Symbole (z.B. verbal oder durch mathematische Zeichen) erfasst.

Beim Lernen kommt es darauf an, Inhalte auf möglichst allen Ebenen zu erschließen und dabei möglichst viele Übergänge zwischen den Darstellungsebenen zu pflegen.

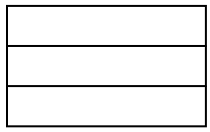
Was bedeutet das für den Mathematikunterricht?
Insbesondere in den unteren Jahrgangsstufen der Realschule erscheint es unerlässlich, neue mathematische Konzepte auf der konkreten Anschauung oder auf konkretem Handeln basierend aufzubauen. Sollen Schüler mathematische Einsichten auf der abstrakt-symbolischen Ebene entwickeln, so ist es hilfreich, wenn sie beim Lernen den Bezug zur enaktiven oder ikonischen Ebene stets vor Augen haben.

Betrachten wir vor diesem Hintergrund nochmals obige Aufgaben: Die ersten Aufgaben können die Schüler auf enaktiver Ebene erschließen und alle Möglichkeiten durch Probieren finden. Sie können ihre gefundenen Ergebnisse in ikonischer Repräsentation festhalten.

Durch das Bearbeiten isomorpher Probleme und die Verallgemeinerung der Beispiele stoßen sie allmählich zu den formal-strukturellen Abstraktionen vor. Bei diesem Prozess kommt insbesondere dem Anfertigen von Baumdiagrammen eine unterstützende Funktion zu.

Haben die Schüler mehrere repräsentative Beispiele intensiv erkundet, können sie sich allmählich von der enaktiven Ebene lösen und Probleme mit größeren Zahlen bearbeiten:

Harry Potter möchte für Hogwarts eine Fahne mit drei verschiedenfarbigen Streifen entwerfen. Er hat fünf Farben zur Verfügung.
Wie viel verschiedene Fahnen könnte er gestalten?



Wie viele Einstellmöglichkeiten gibt es bei einem Fahrradzahlenschloss mit drei drehbaren Scheiben?

Auf einer Audio-CD sind 13 Titel. Der Zufallsgenerator eines CD-Players wird eingestellt. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Songs sind möglich?

Quelle: Materialien zum BLK-Modellversuch SINUS, Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur, CD, Universität Kassel 2003

Fazit

In der Grundschule und den unteren Jahrgangsstufen der Realschule soll durch die Bearbeitung derartiger Beispiele vor allem ein tiefes Grundverständnis der Schüler dafür erzeugt werden, dass den dargestellten Problemen jeweils eine ***Multiplikation*** zu Grunde liegt.

Führen wir uns diesen universellen Gedankengang an obigem Beispiel „Harry Potter" nochmals vor Augen:

- Für die Farbe des obersten Streifens dieser Flagge gibt es 5 Möglichkeiten.
- Für ***jede*** dieser 5 Möglichkeiten gibt es für den mittleren Streifen 4 Möglichkeiten. Die beiden oberen Streifen lassen sich also auf $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten färben.
- Für ***jede*** dieser 20 Möglichkeiten kann der unterste Streifen noch auf 3 verschiedene Arten gefärbt werden. Insgesamt gibt es für die Farbanordnung der Flagge also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Dieser Gedankengang lässt sich auf alle bisherigen Aufgaben übertragen. Er bietet einen Weg, zunächst unübersichtlich erscheinende Anzahlen systematisch zu ermitteln.

Woraus besteht bei allen bisherigen Aufgaben das gemeinsame mathematische „Muster“? Denken wir dabei exemplarisch an eine beliebige bisherige Aufgabe zurück.

- Es ist jeweils nach einer Anzahl von Möglichkeiten gefragt.
- Es sind Positionen zu besetzen, die in einer festen Reihenfolge stehen.
- Für die Besetzung jeder einzelnen Position gibt es eine feste Zahl von Möglichkeiten.

Zählprinzip

> Gibt es bei der Besetzung von Positionen, die in fester Reihenfolge stehen, bei jeder Position eine bestimmte Anzahl von Möglichkeiten, so erhält man die Gesamtzahl aller möglichen Besetzungen, indem diese einzelnen Anzahlen miteinander multipliziert.

Dabei muss aber stets der Bezug zu einem aussagekräftigen Beispiel hergestellt werden, um das notwenige Verständnis dieses Prinzips zu sichern. Es wäre wenig sinnvoll, den Wortlaut dieses Satzes verständnislos auswendig zu lernen.

Kombinatorische Probleme, bei denen sich das Zählprinzip nicht anwenden lässt

Das Zählprinzip lässt sich direkt anwenden, wenn für die Besetzung jeder einzelnen Position eine jeweils feste Anzahl von Möglichkeiten existiert. Die zugehörigen Baumdiagramme haben dabei eine *symmetrische* Gestalt.
Um das Denken der Schüler flexibel zu gestalten, sollten auch Probleme bearbeitet werden, bei denen diese Eigenschaften nicht erfüllt sind.

> Du hast einen blauen und drei rote Legosteine. Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?
>
> Wie viele Türme aus drei Steinen gibt es damit?

> Du hast einen blauen, einen gelben und zwei rote Legosteine. Wie viele verschieden Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?
>
> Wie viele Türme aus drei Steinen gibt es?

Zugangswege:

- Türme bauen, ausprobieren
- Zeichnungen anfertigen
- Türme symbolisch darstellen
- Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist jeweils unsymmetrisch. Es stellt ein geeignetes Werkzeug dar, um sich auch in solchen Situationen von der enaktiven Ebene allmählich zu lösen und derartige Probleme in graphisch-symbolischer Notation zu bearbeiten.

3. Absolute und relative Häufigkeiten, Gesetz der großen Zahlen

Lehrplan RS
M 6.9
Die Schüler führen einfache Zufallsexperimente durch und werten selbst erhobene Daten aus. Dabei lernen sie die relative Häufigkeit als Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl kennen.
- Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten
- relative Häufigkeit

M 7.8
Die Schüler sammeln Daten, die sie z. B. bei der Durchführung von Zufallsexperimenten gewinnen. Dabei wiederholen und vertiefen sie den Begriff der relativen Häufigkeit.
- empirisches Gesetz der großen Zahlen

In der 6. und 7. Jahrgangsstufe bietet sich im Zusammenhang mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten die Beschäftigung mit Zufallsexperimenten und relativen Häufigkeiten an.

Ein Experiment

Bleibt ein Reißnagel nach dem Werfen eher auf der Spitze oder auf dem „Rücken“ liegen? Wir führen dies mehrmals durch und zählen, wie oft die Spitze unten liegt.

Gesamtzahl n der Würfe	10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
Anzahl k mit „Spitze unten“															
Anteil $\frac{k}{n}$															

Die Zahl k nennt man absolute Häufigkeit des Ereignisses „Spitze unten“, der Anteil $\frac{k}{n}$ heißt relative Häufigkeit des Ereignisses „Spitze unten“.

Definition

Wiederholt man dasselbe Zufallsexperiment n-mal und tritt dabei ein Ereignis k-mal ein, so nennt man die Zahl k **absolute Häufigkeit** und den Anteil $\frac{k}{n}$ **relative Häufigkeit** dieses Ereignisses.

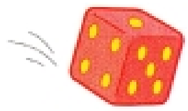
Graphische Darstellung der gemessenen relativen Häufigkeiten

> **Beobachtung: Empirisches Gesetz der großen Zahlen**
>
> Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Zahl von Versuchen.

Weitere Aufgaben/Hausaufgaben

1) Wirf eine Münze 10, 20, 30, ..., 100 Mal und notiere jeweils, wie oft die Seite mit der Zahl oben liegt. Berechne jeweils die relative Häufigkeit von „Zahl“.
Stelle deine Resultate in einer Tabelle und in einem Diagramm dar.
Beschreibe deine Beobachtungen bei den Versuchen in deinem Heft.

2) Wirf einen Spielwürfel 10, 20, 30, ..., 100 Mal und notiere jeweils, wie oft die „Sechs“ erscheint. Berechne jeweils die relative Häufigkeit von „Sechs“.
Stelle deine Resultate in einer Tabelle und in einem Diagramm dar.
Beschreibe deine Beobachtungen bei den Versuchen in deinem Heft.



3) Beschrifte die sechs Seitenflächen einer Streichholzschachtel oder eines Legosteins mit den Zahlen 1 bis 6. Würfle mit deiner Streichholzschachtel bzw. dem Legostein 10, 20, 30, ..., 100 Mal und notiere jeweils, welche Zahl oben liegt. Berechne zu den Zahlen die relativen Häufigkeiten.
Stelle deine Resultate in einer Tabelle und in einem Diagramm dar.
Beschreibe deine Beobachtungen bei den Versuchen in deinem Heft.

Die relativen Häufigkeiten können als Schätzwert zur Vorhersage von Gewinnchancen interpretiert werden. Damit wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff propädeutisch vorbereitet.

4. Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace

Die Begriffe „Zufall“ und „wahrscheinlich“ begegnen den Schülern im Alltag in verschiedenen Situationen:

- Die Regenwahrscheinlichkeit beträgt 60%.
- Dass der FC Bayern aus der Bundesliga absteigt, ist höchst unwahrscheinlich.
- Ich komme nur zufällig vorbei.
- Bei einem Würfel sind alle sechs Zahlen gleich wahrscheinlich.
- …

Ein Anliegen des Mathematikunterrichts ist es, die Vorstellungen der Schüler zu den Begriffen „Zufall“ und „wahrscheinlich“ zu diskutieren und zu präzisieren.
Dabei geht es nicht nur um Rechnen, sondern auch um ein *Reden* über Wahrscheinlichkeit.

Lehrplan RS
M 7.8
- Laplace-Wahrscheinlichkeit

M 8.9
Aufbauend auf Zufallsexperimenten werden Wahrscheinlichkeiten berechnet. Versuchsausgänge werden unter Verwendung der mathematischen Fachsprache beschrieben. Die Laplace-Wahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von Baumdiagrammen und durch geschicktes Abzählen ermittelt.
- Laplace-Experiment (Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis)
- Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

4.1 Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten entwickeln

Fragen zur Diskussion

1) Wo begegnet dir der Zufall im täglichen Leben?

2) Zwei Fußballmannschaften werfen eine Münze, um zu entscheiden, welche Mannschaft auf welcher Platzseite beginnt. Ist dieses Verfahren fair?

3) Treten beim Würfeln alle Zahlen gleich wahrscheinlich auf?

4) Was ist wahrscheinlicher, mit einem Würfel eine Eins oder mit einer Münze eine Zahl zu werfen?

5) Was ist wahrscheinlicher, mit einem Würfel eine Sechs oder mit zwei Würfeln eine Doppelsechs (Sechserpasch) zu werfen?

6) Heidi hat beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel bereits 20 Mal keine Sechs gewürfelt. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beim nächsten Wurf eine Sechs erhält, nun größer als zu Beginn des Spiels?

7) Stefan wirft mehrmals eine Münze und notiert, ob „Kopf“ oder „Zahl“ oben liegt. Welcher Ausgang ist wahrscheinlicher: KKKKKKKKKK oder KZKKZZKZZK?

8) Max und Laura vereinbaren ein Spiel: In einer Lostrommel befinden sich 49 Lose mit Nummern 1 bis 49. Es wird ein Los gezogen. Max gewinnt, wenn eine gerade Zahl gezogen wird, Laura bei einer ungeraden. Ist das Spiel fair?

9) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einmaligem Würfeln

- eine Sechs geworfen,
- eine gerade Zahl gewürfelt,
- keine Sechs geworfen?

10) Aus unserer Klasse wird durch Los zufällig ein Schüler ausgewählt, der an einer Fahrt ins Deutsche Museum nach München teilnehmen darf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser Schüler

- ein Mädchen,
- ein Junge,
- ein Klassensprecher,
- blond?

4.2 Laplace-Wahrscheinlichkeit (1. Fassung)

Die Diskussion derartiger Bespiele führt zu einer Begriffsbildung, die auf den französischen Mathematiker Pierre Laplace (1749 – 1827) zurückgeht:

$$Wahrscheinlichkeit = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ der\ möglichen\ Fälle}$$

Dabei darf keiner der möglichen Fälle gegenüber anderen bevorzugt sein.

Vorsicht vor Fehlvorstellungen (!!!)
Schüler wie auch Erwachsene arbeiten intuitiv gelegentlich mit einem anderen Wahrscheinlichkeitsbegriff: Auf die Frage nach der Chance, mit einer Münze „Zahl" zu werfen, erhält man auch die Antwort „Die Chance ist eins zu eins" bzw. „Fifty fifty". Entsprechend wird für das Auftreten einer Sechs beim Würfeln die Wahrscheinlichkeit eins zu fünf angegeben.

Dahinter steht eine Vorstellung von der Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis der Zahl der günstigen Fälle zur Zahl der ungünstigen Fälle.

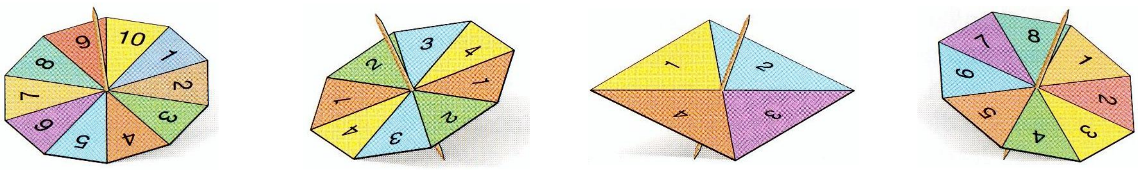
Derartige Vorstellungen sollten thematisiert werden. Letztlich wäre ein derartiger Wahrscheinlichkeitsbegriff ebenfalls tragfähig. Allerdings sollten die Schüler einsehen, dass es zur Kommunikation über mathematische Inhalte notwendig ist, die verwendeten Begriffe eindeutig festzulegen, und obige Festlegung von Wahrscheinlichkeit ist eben die historisch gewachsene und international übliche.

Beispiele

Mit variationsreichen Beispielen muss das Verständnis für den Wahrscheinlichkeitsbegriff vertieft werden. Dabei erweist sich bei zusammengesetzten Zufallsexperimenten das früher kennen gelernte Zählprinzip als unerlässlich.

Bei einem ersten Zugang zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten erscheint es nicht zwingend, die Mengensprech- und -schreibweise sofort zu verwenden. Eine zu starke Formalisierung birgt die Gefahr, dass die „Natürlichkeit“ und Einfachheit dieser Begriffsbildung verschüttet wird.

1) Die abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.



   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Feld „2“ liegen bleiben?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer geraden Zahl liegen bleiben?
   c) Für welche Glückskreisel ist das Spiel „Du gewinnst, wenn eine Primzahl kommt.“ fair?
   d) Finde andere faire bzw. unfaire Spielregeln für die einzelnen Glückskreisel.

(Quelle: Materialien zum BLK-Modellversuch SINUS, Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur, CD, Universität Kassel 2003)

2) Wie wahrscheinlich ist es, dass stets nur „Kopf“ erscheint, wenn man eine Münze zweimal, dreimal, viermal, fünfmal, ... wirft?

3) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei der Lotto-Ziehung mit 49 Kugeln die erste Zahl
   - eine 7 ist,
   - durch 7 teilbar ist,
   - kleiner als 20 ist,
   - eine Primzahl ist,
   - ... ?

4) Drei (vier, fünf, ...) Schüler stellen sich zufällig nebeneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der größte Schüler außen?

5) Onkel Georg, Onkel Helmut und Onkel Heinz parken ihre Autos zufällig nebeneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das Auto von Onkel Helmut neben dem von Onkel Heinz?

6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es nächste Woche?

7) Erfinde selbst Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten und versuche, sie zu lösen!

Nach dem intuitiven Zugang zu diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff kann sich in der 8. Jahrgangsstufe eine formalere Fassung mit dem Mengenbegriff anschließen:

4.3 Ergebnisse und Ergebnisraum

Die einzelnen möglichen Ausgänge einen Zufallsexperiments werden auch als *Ergebnisse* bezeichnet. Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden den *Ergebnisraum*.

Lehrplan RS
M 8.9
- Laplace-Experiment (Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis)
- Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Würfeln

a) Mögliche Ergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6
Ergebnisraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Die Menge der möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnisraum** Ω.

Bei demselben Zufallsexperiment können verschiedene Ergebnisräume sinnvoll sein, je nachdem, unter welchem Gesichtspunkt man es betrachtet.

b) Beim Würfeln könnte man sich etwa nur für die Ausgänge „Sechs“ oder „nicht Sechs“ interessieren:
Mögliche Ergebnisse: „Sechs“, „nicht Sechs“
Ergebnisraum: Ω = {„Sechs“, „nicht Sechs“}

c) Vielleicht interessiert auch nur die Frage, ob eine gerade oder eine ungerade Zahl erscheint:
Mögliche Ergebnisse: „gerade“, „ungerade“
Ergebnisraum: Ω = {„gerade“, „ungerade“}

Die Ergebnisräume aus b) und c) sind *Vergröberungen* des Ergebnisraums aus a).

Aufgaben

- Zu vorgegebenen Zufallsexperimenten passende Ergebnisräume angeben.
- Zufallsexperimente selbst erfinden und Ergebnisräume beschreiben.
- Zu vorgegebenen Ergebnisräumen Zufallsexperimente erfinden.

4.4 Ereignisse

In der 5. – 7. Jahrgangsstufe wird man den Begriff des Ereignisses einfach benutzen, ohne ihn zu definieren. In ganz natürlicher Weise wird all das als Ereignis bezeichnet, was bei einem Zufallsexperiment auftreten oder nicht auftreten kann.

Der Lehrplan sieht in der 8. Jahrgangsstufe eine formalere Fassung vor, die auf dem Ergebnisraum aufbaut: *Ereignisse* sind Mengen von Ergebnissen. Sie fassen einzelne Ergebnisse zusammen.

Beispiel: Würfeln
Wir betrachten wieder das Würfeln mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Beim Würfeln können verschiedene Ereignisse eintreten, z. B.:

- „Die gewürfelte Zahl ist kleiner gleich 3.“ = $\{1, 2, 3\}$
- „Es wird eine Sechs gewürfelt.“ = $\{6\}$
- „Eine gerade Zahl wird gewürfelt.“ = $\{2, 4, 6\}$

Wenn beispielsweise bei einem konkreten Wurf eine Sechs erscheint, so tritt das erste dieser drei Ereignisse nicht ein, die beiden anderen dagegen schon.

Jedem umgangssprachlichen „Ereignis“ wird eine Teilmenge von Ω zugeordnet. Dies führt zur Definition:

> Jede Teilmenge A des Ergebnisraums Ω heißt **Ereignis**.
> Ein Ereignis A **tritt ein**, wenn ein Zufallsexperiment ein Ergebnis hervorbringt, das in A enthalten ist.

Gegenereignis
Zu jedem Ereignis A nennt man das Ereignis $\overline{A} = \Omega \backslash A$ das **Gegenereignis**. $\overline{A}$ enthält also genau die Elemente aus Ω, die in A nicht enthalten sind. Immer wenn A eintritt, tritt $\overline{A}$ nicht ein. Immer wenn A nicht eintritt, tritt $\overline{A}$ ein.

Beispiel:
Beim Würfeln sei der Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Das Ereignis
A = „Eine gerade Zahl wird gewürfelt.“ = $\{2, 4, 6\}$ hat das Gegenereignis
$\overline{A}$ = „Eine ungerade Zahl wird gewürfelt.“ = $\{1, 3, 5\}$.

Das Ereignis
B = „Eine Zwei wird gewürfelt.“ = $\{2\}$ hat das Gegenereignis
$\overline{B}$ = „Keine Zwei wird gewürfelt.“ = $\{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ist $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Aufgaben
Im Rahmen von Aufgaben werden

- verbal beschriebene Ereignisse als Mengen (Teilmengen von Ω) identifiziert,
- durch Mengen vorgegebene Ereignisse verbalisiert.

Beispiele:

- Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Gib das Ereignis „Die Augensumme ist größer als 15“ als Teilmenge eines geeigneten Ergebnisraums an.
- Eine Münze wird viermal hintereinander geworfen. Formuliere das Ereignis {KZKZ, ZKZK} in Worten.
- Erfinde zu dem Ereignis {Laura, Leon, Lenard} ein Zufallsexperiment.

4.5 Laplace-Wahrscheinlichkeit (2. Fassung)

Mit den neuen Begriffen lässt sich obiger Wahrscheinlichkeitsbegriff formaler, aber inhaltlich identisch formulieren:

Definition

Wenn es bei einem Zufallsexperiment nur endlich viele Ergebnisse gibt und diese als *gleich wahrscheinlich* angenommen werden, spricht man von einem **Laplace-Experiment**.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} .$$

Dabei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente der Menge A. Ebenso steht $|\Omega|$ für die Anzahl der Elemente des Ergebnisraums Ω.

Um diese Definition auf Beispiele anzuwenden, müssen

- ein geeigneter Ergebnisraum gewählt werden,
- die Anzahl $|\Omega|$ aller möglichen Ergebnisse bestimmt werden,
- die Anzahl $|A|$ der Ergebnisse, die zum Ereignis A führen, bestimmt werden.

Damit ist dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} .$$

Diese Definition der Laplace-Wahrscheinlichkeit und die erste Fassung aus 4.2 sind also inhaltlich gleichbedeutend.

Diese Definition lässt sich auf eine Vielzahl von Beispielen anwenden, z.B.:

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man an einem Sonntag Geburtstag?

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus unserer Klasse bestimmter Schüler ein Musikinstrument spielt?

3) Aus einem Kartenspiel mit 24 Karten wird zufällig eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es
   - ein Ass,
   - kein Ass,
   - eine Herz-Karte,
   - keine Herz-Karte,
   - das Herz-Ass,
   - eine Herz-Karte, aber kein Ass,
   - ein Ass, aber keine Herz-Karte?

4) Max möchte seinen Freund Peter anrufen. Er weiß nur noch, dass Peters Telefonnummer dreistellig ist. Er tippt auf gut Glück eine beliebige dreistellige Nummer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit läutet es bei Peter?

5) Schreibe eine beliebige zweistellige natürliche Zahl auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hast du eine Primzahl?

6) Fünf verschiedene Paar Socken liegen „wild durcheinander" in einer Schublade. Zwei einzelne Socken werden zufällig herausgezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passen sie zusammen?

7) …

Zum Knobeln

Im Zeitalter des Barock waren in Frankreich mathematische Fragestellungen ausgesprochen hof- und gesellschaftsfähig. So sind zahlreiche Briefwechsel überliefert, die die Entwicklung der Stochastik entscheidend voran gebracht haben.

Beispielsweise berichtete Chevalier de Méré in einem Schreiben an Blaise Pascal von folgenden Beobachtungen beim Würfelspiel:

> Drei symmetrische Würfel werden gleichzeitig geworfen und die Augensumme bestimmt. Die Chancen für das Auftreten der Augensumme 11 und der Augensumme 12 sollten gleich groß sein.
> Für die Summe 11 gibt es nämlich sechs verschiedene Möglichkeiten
> $(\{1, 4, 6\}, \{1, 5, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 3, 5\}, \{3, 4, 4\})$
> und für die Summe 12 gibt es ebenfalls sechs verschiedene Möglichkeiten
> $(\{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 5\}, \{3, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 4, 4\})$.

Chevalier de Méré beobachtete aber, dass die Augensumme 11 häufiger auftrat als die Summe 12. Klären Sie diese Situation!

4.6 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Oft lassen sich Zufallsexperimente als Zusammensetzung einfacherer Zufallsexperimente auffassen, z.B.:

- „Eine Münze wird dreimal geworfen." Das Teilexperiment „Münze werfen" wird hier dreimal wiederholt.

- „Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt." Dies lässt sich als zweimalige Ausführung des Zufallsexperiments „Einen Würfel werfen" auffassen.

> ***Lehrplan RS***
> **M 5.8**
> - Durchführung und Auswertung von ein- und zweistufigen Zufallsversuchen
>
> **M 9.11**
> Aufbauend auf den Inhalten der Jahrgangsstufe 8 beschäftigen sich die Schüler systematisch mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten und veranschaulichen den Ablauf solcher Vorgänge an Baumdiagrammen.
> - zusammengesetzte Zufallsexperimente

- „Du hast vier Pullover und drei Hosen, wählst zufällig einen Pullover und eine Hose und ziehst dich damit an." Dies lässt sich in die Teilexperimente „Pullover anziehen" und „Hose anziehen" gliedern.

- Alle in Abschnitt 2 besprochenen Situationen führen zu mehrstufigen Zufallsexperimenten, wenn jeweils eine aller Möglichkeiten zufällig ausgewählt wird.

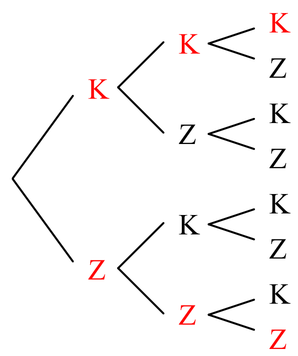
Wie geht man mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten systematisch um? Betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel 1

> Eine Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei allen drei Würfen die gleiche Münzseite?

Wir geben zunächst einen passenden Ergebnisraum an. Das Gesamtexperiment lässt sich in drei einfache Teilexperimente (Münzwurf mit den Ausgängen K bzw. Z) gliedern. Nach dem Zählprinzip gibt es für das Gesamtexperiment $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Das Baumdiagramm veranschaulicht dies.

$$\Omega = \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ\}$$



Das erwähnte Ereignis ist

$$A = \{KKK, ZZZ\}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 25\%.$$

Beschreiben wir unser Vorgehen bei zusammengesetzten Zufallsexperimenten allgemein:

- Zunächst bestimmen wir einen passenden Ergebnisraum. Bei der Bestimmung der Anzahl möglicher Ergebnisse kann das Zählprinzip helfen.
- Dann beschreiben wir das in Frage kommende Ereignis als Teilmenge dieses Ergebnisraums.
- Damit berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel 2

Wir werfen zwei Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Sechserpasch bzw. ein beliebiger Pasch?

Wir geben zunächst einen passenden Ergebnisraum an. Das Experiment lässt sich in zwei einzelne Würfe zerlegen. Nach dem Zählprinzip gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. Das Baumdiagramm ist hier etwas umfangreich.

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, \ldots, 63, 64, 65, 66\}.$$

Das Ereignis „Sechserpasch“ ist

$$A = \{66\}.$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Das Ereignis „beliebiger Pasch“ ist

$$B = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$$

mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Weitere Beispiele

Aufbauend auf das Zählprinzip lassen sich typische zusammengesetzte Zufallsexperimente erschließen:

1) Vier Kinder stellen sich zu einem Foto nebeneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht Laura neben ihrer Schwester?

2) Max stellt fünf Schulbücher zufällig nebeneinander ins Regal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das Erdkundebuch neben dem Englischbuch?

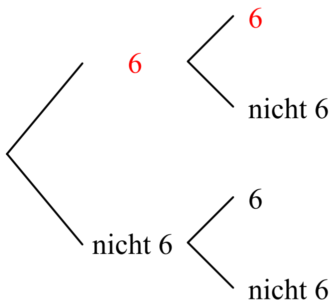
3) Aus einem Kartenspiel mit 24 Karten werden zufällig drei Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es drei Könige?

Vorsicht (!!!)

Damit der Begriff der Wahrscheinlichkeit nach Laplace überhaupt angewendet werden kann, ist es notwendig, dass alle Einzelergebnisse in Ω gleichwahrscheinlich sind. Ein typischer Fehler bei obiger Frage nach einem Sechserpasch beim Werfen zweier Würfel wäre etwa:

Wir werfen zwei Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Sechserpasch?

Wir unterscheiden beim Werfen eines Würfels nur die Ergebnisse „6“ und „nicht 6“. Das Baumdiagramm veranschaulicht das Werfen zweier Würfel.



Der Ergebnisraum hat damit vier Elemente und ist

$$\Omega = \{(6,6);\ (6;\ \text{nicht } 6);\ (\text{nicht } 6,\ 6);\ (\text{nicht } 6,\ \text{nicht } 6)\}.$$

Das Ereignis „Sechserpasch“ umfasst einen dieser vier Ausgänge:

$$A = \{(6,6)\}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$

FALSCH!

Oben haben wir aber festgestellt, dass ein Sechserpasch nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ auftritt. Wie kann das sein?

Der Fehler liegt darin, dass wir die Laplace-Definition für Wahrscheinlichkeit überhaupt angewendet haben. Der Fehler befindet sich also an der mit dem grauen Pfeil markierten Stelle. Die Laplace-Definition für Wahrscheinlichkeit ist nur zulässig, wenn davon ausgegangen werden kann, dass alle Einzelergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Genau dies ist aber beim vierelementigen Raum Ω nicht erfüllt: Das Ergebnis *(6,6)* tritt viel seltener ein als *(nicht 6, nicht 6)*.

(Hinweis: Nun wird es Ihnen leicht fallen, das oben erwähnte Problem des Chevalier de Méré zu klären.)

4.7 Von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit

In Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen haben wir gesehen, dass sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses um eine bestimmte Zahl stabilisieren, die wir aber nicht ohne weiteres kennen. Diese Zahl ist die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses.

Für Laplace-Experimente können wir diese Zahl berechnen. Für andere Zufallsexperimente ist dies unter Umständen nicht möglich. Z. B kann beim Experiment „Werfen eines Reißnagels“ die Wahrscheinlichkeit, dass die Spitze nach dem Werfen unten liegt, nie exakt durch Versuchsreihen ermittelt werden. Versuchsreihen müssen immer eine endliche Länge haben, verschiedene Versuchsreihen liefern in der Regel verschiedene relative Häufigkeiten.

Relative Häufigkeiten können aber als *Schätzwerte* für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dienen.

Vergleich zur klassischen Physik

Physikalische Größen aus unserer Umwelt wie Längen, Massen, Zeiten können ebenfalls nur näherungsweise gemessen werden. Je nach Wahl der Messwerkzeuge ist nur eine bestimmte Messgenauigkeit erreichbar. Dennoch nimmt man an, dass den Größen ein eindeutiger Zahlenwert zugeordnet ist, der letztendlich nie „exakt“ bestimmt werden kann.

Die Idee, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten aufzufassen

Nach dem Gesetz der großen Zahlen stabilisieren sich bei vielen Zufallsexperimenten die relativen Häufigkeiten eines beobachteten Ereignisses mit zunehmender Zahl von Versuchen. Dieser empirische Befund legt es nahe, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A als die Zahl zu definieren, gegen die die Folge der relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ für wachsendes n strebt:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$$

Dieser Ansatz geht auf den österreichischen Mathematiker Richard von Mises (1883 – 1953) zurück und hat lange Zeit kontroverse Diskussionen unter Mathematikern provoziert.

Einwand:
Hier werden Begriffe der Analysis in unzulässiger Weise verwendet. Es ist falsch, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Es ist nicht auszuschließen, dass in einer Versuchsserie die relativen Häufigkeiten auch für beliebig große n auch außerhalb der ε-Umgebung liegen. Damit steht der Versuch, Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Grenzwertbegriffs der Analysis zu definieren, im Widerspruch zu den Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Idee von v. Mises besitzt heute nur noch historische Bedeutung.

5. Beschreibende Statistik

5.1 Sammeln, Darstellen und Auswerten von Daten

Lehrplan RS
M 5.8
Die Schüler lernen Daten in Tabellen und Diagrammen darzustellen und Informationen aus diesen Darstellungen herauszulesen und zu beurteilen. Ihnen wird bewusst, dass bei der Darstellung von Daten in Tabellen und Diagrammen Informationen verloren gehen können.
- Erfassen, Darstellen und Auswerten von Daten

M 6.9
Die Schüler werten selbst erhobene Daten aus.
- Auswertung und Interpretation von Daten unter Verwendung von Kenngrößen (Modalwert, Zentralwert, Spannweite, arithmetisches Mittel)

M 7.8
Die Schüler sammeln Daten, die sie z.B. mit Hilfe eines selbst erstellten Fragebogens gewinnen.
- Erfassen, auswerten und interpretieren von Daten unter Verwendung von zusätzlichen Kenngrößen (Stichprobe, Gesamtheit)

M 9.11
Abweichungen bei Messreihen oder statistischen Erhebungen beschreiben die Schüler mit den Kenngrößen Varianz und Standardabweichung.
- Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Überlegen Sie sich Unterrichtsbeispiele und Aufträge an die Schüler, bei denen die Schüler Daten sammeln, darstellen und auswerten!

Nachdem die Schüler Daten gesammelt haben, stoßen sie auf die Notwendigkeit, diese übersichtlich darzustellen. Hierbei lernen sie verschiedene Arten der Visualisierung kennen und fertigen selbst Diagramme und Übersichten an, z.B.
- Tabelle,
- Stabdiagramm,
- Balkendiagramm,
- Säulendiagramm,
- Kreisdiagramm,
- Blockdiagramm,
- Piktogramm (Symbole stehen für eine bestimmte Einheitsmenge, z.B. ☺ für 1000 Personen, also ☺ ☺ ☺ für 3000 Personen.),
- ...

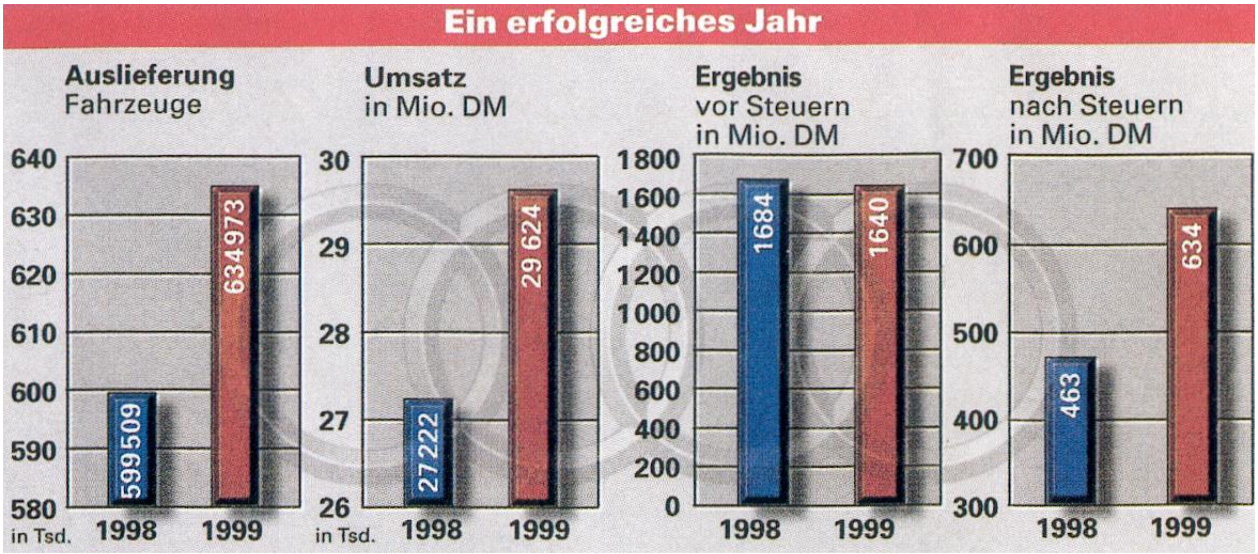
Hier bieten sich natürlich offene Arbeitsformen an:
- Die Schüler sammeln in Gruppen Daten, werten diese aus und präsentieren ihre Ergebnisse im Klassenplenum ihren Mitschülern.
- Im Klassenteam werden die Präsentationen und insbesondere die Art der Visualisierung der Daten diskutiert.

Bei der Anfertigung von Tabellen und Diagrammen können die Schüler Tabellenkalkulationsprogramme (wie EXCEL) und deren graphische Auswertungsmöglichkeiten nutzen, um so ihre informationstechnischen Grundkenntnisse zu erweitern. Allerdings sollten sie Diagramme *auch* per Hand zeichnen, um den Prozess der Datenvisualisierung in seiner Gesamtheit (ohne „black boxes“) zu erleben und zu durchschauen.

Anknüpfend an ihre eigenen Erfahrungen beim Herstellen von Diagrammen können die Schüler auch fertige Datendarstellungen aus dem Alltag (z.B. aus der Zeitung) auswerten und interpretieren. Dabei bietet es sich insbesondere an, Diagramme zur Diskussion zu stellen, in denen die zu Grunde liegenden statistischen Daten verfälscht dargestellt werden und so – bewusst oder unbewusst – manipuliert wurde. Gängige Zeitschriften und Zeitungen bieten hierzu aktuelles Rohmaterial für das Arbeiten mit Statistiken in der Schule. Einige Beispiele:

Audi-Bilanz

Am Ende eines jeden Jahres erstellen Firmen eine Bilanz der Unternehmensergebnisse, um zu sehen, ob sie sich im Vergleich zum Vorjahr verbessert bzw. verschlechtert haben. Für die Öffentlichkeit und besonders für potentielle Aktienkäufer werden die Bilanzen graphisch aufbereitet. Die vier unten abgebildeten Balkendiagramme stellen die Jahresbilanz des Audikonzerns der Jahre 1998 und 1999 gegenüber.



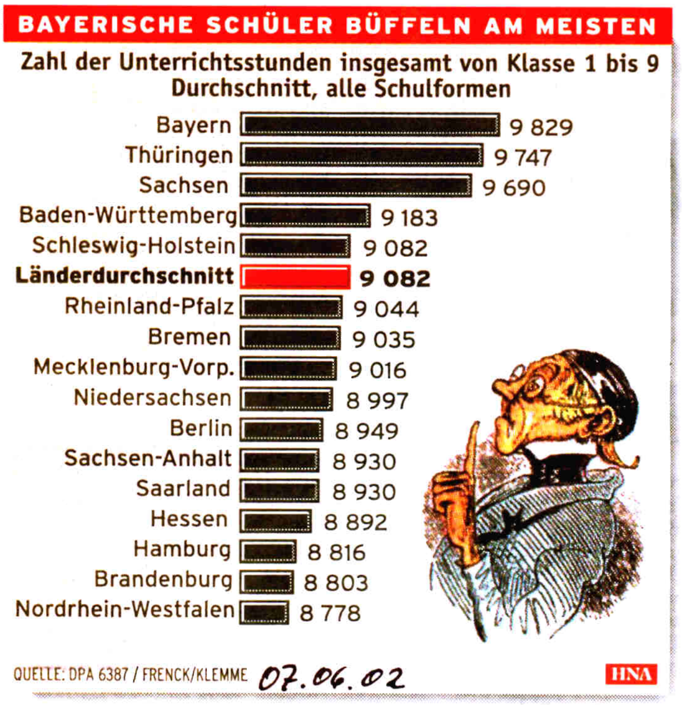
a) Beschreibe, welchen Eindruck die Grafiken dem Betrachter beim ersten Anblick vermitteln und wodurch dies erreicht wird.

b) Versuche, für die Daten eine andere Darstellungsart zu finden. Welchen Eindruck erhält man nun von der Jahresbilanz 1999 des Audikonzerns?

c) Können die Ergebnisse des Audikonzerns auch besonders schlecht dargestellt werden?

d) Was ist die „richtige" Darstellungsart der Jahresbilanz?

Quelle: mathematik lehren (2000), Heft 103, S. 67.



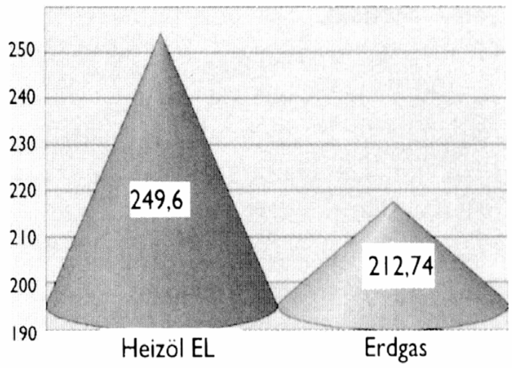
CO_2-Emission

Das nebenstehende Diagramm befand sich in der Kundenzeitschrift „Tag und Nacht“ 3/1999 der Wetzlarer Stadtwerke. Es soll Kunden zur Umstellung ihrer Heizungsanlage von Heizöl auf Erdgas motivieren.

a) Was meinst du dazu? Um wie viel Prozent ist der Erdgas-Kegel kleiner als der Heizöl-Kegel?

b) Vergleiche mit den angegebenen Zahlen.

c) Versuche eine angemessene Darstellung der Werte mit Kegeln (bzw. mit anderen geometrischen Körpern) zu finden.

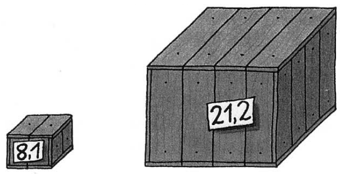


Bisherige Minderung der CO_2-Emission – unter Berücksichtigung gleicher Energieinhalte – in Tonnen pro Jahr durch Brennstofftausch bei der Aktion WechselGeld

Quelle: mathematik lehren (1999), Heft 97, S. 66

Die Umweltschutzausgaben der Industrie für die Einrichtung und Unterhaltung von Anlagen stiegen innerhalb von 10 Jahren von 8,1 Mrd. € auf 21,2 Mrd. €.

a) Was ist an der Darstellung falsch? Welchen Eindruck soll die Manipulation bewirken?
b) Zeichne eine geeignetere Darstellung des Sachverhalts. Nenne Vor- bzw. Nachteile der verschiedenen Darstellungen.



Quelle: Materialien zum BLK-Modellversuch SINUS, Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur, CD, Universität Kassel 2003

5.2 Statistische Maßzahlen

Statistische Maßzahlen kennzeichnen spezifische Eigenschaften einer Verteilung und sind somit auch zum Vergleich verschiedener Verteilungen (aus verschiedenen statistischen Erhebungen) geeignet. Man unterscheidet zwischen Lage- und Streuungsparametern. Die Lageparameter, wie z.B. das arithmetische Mittel, der Median und der Modalwert, geben Aufschluss über das „Zentrum“ einer Verteilung. Die Streuungsparameter, wie z.B. die Spannweite, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung, geben Aufschluss über die Streuung der Werte einer Verteilung. Lage- und Streuungsparameter ergänzen also einander in wesentlichen Punkten und gehören zur Beschreibung einer Verteilung zusammen.

Beispiel

Von 9 Kindern werden die Körpermassen gemessen:

Kind	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Masse in kg	42	45	48	38	47	48	39	57	48

1) Median (Zentralwert)

Der Median ist dadurch bestimmt, dass er in der Mitte einer der Größe nach geordneten Datenmenge liegt.

Wir ordnen im obigen Beispiel die Daten der Größe nach:

38 kg, 39 kg, 42 kg, 45 kg, 47 kg, 48 kg, 48 kg, 48 kg, 57 kg.

Von neun Werten liegt der fünfte in der Mitte, der Median dieser Daten ist also 47 kg.

Bei einer *ungeraden* Anzahl von geordneten Werten ist der Median genau der „in der Mitte“ liegende Wert.

Bei einer *geraden* Anzahl definiert man ihn als arithmetisches Mittel der beiden „in der Mitte“ liegenden Werte. Der Median der Daten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ist also das arithmetische Mittel der Werte 4 und 5, also gleich 4,5.

Allgemein:

Seien $x_1 \leq ... \leq x_n$ der Größe nach geordnete metrische Daten. Der **Median (Zentralwert)** dieser Daten ist der Wert

$x_{\frac{n+1}{2}}$ bei ungeradem n und

$\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ bei geradem n.

Mindestens 50% der Daten sind kleiner oder gleich dem Median, mindestens 50% der Daten sind größer oder gleich dem Median.

2) Modalwert

Ein Wert einer Datenmenge, der am häufigsten vorkommt, heißt **Modalwert**.

Im obigen Beispiel haben drei Schüler die Masse 48 kg, der Modalwert ist also 48 kg.

Eine Stichprobe kann mehrere Modalwerte besitzen. So sind beispielsweise für die Daten {1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7} die Zahlen 3 und 6 Modalwerte, da beide gleich oft und häufiger als die anderen Werte vorkommen.

3) Arithmetisches Mittel, Erwartungswert

Die oben angegebenen neun Körpermassen der Schüler haben das arithmetische Mittel

$$(42\text{kg} + 45\text{kg} + \ldots + 48\text{kg}) : 9 \approx 45{,}8 \text{ kg}.$$

Das **arithmetische Mittel** metrischer Daten $x_1, \ldots, x_n$ ist der Wert $\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Das arithmetische Mittel ist der wohl bekannteste und am häufigsten gebrauchte Mittelwert. Er ist schon Grundschülern bekannt. Das Sachrechnen bietet viele Möglichkeiten, diesen Mittelwert wirklichkeitsbezogen einzuführen und zu nutzen.

Beispiel
Stellen wir uns vor, wir möchten feststellen, welche Körpermasse ein Zwölfjähriger in Deutschland im Durchschnitt besitzt. Da wir nicht die Gesamtheit aller deutschen Zwölfjährigen wiegen können, nehmen wir eine Stichprobe von möglichst vielen zwölfjährigen Kindern (z.B. unserer Schule), bestimmen jeweils deren Körpermasse und bilden das arithmetische Mittel der Messwerte. So erhält man eine Näherung für den *Erwartungswert* der Körpermasse Zwölfjähriger.

Allgemein: Bildet man in einer realen Serie von n Zufallsversuchen das arithmetische Mittel aller aufgetretenen Werte x_i, so stabilisiert sich das arithmetische Mittel mit größer werdendem n (gemäß dem empirischen Gesetz der großen Zahlen). Der Wert, um den sich das arithmetische Mittel stabilisiert, heißt *Erwartungswert*.

Führt man ein Zufallsexperiment mehrmals durch und betrachtet man jeweils eine zufällig erzeugte Größe x_i, so stabilisiert sich das arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ mit zunehmender Zahl von Experimenten um einen Wert, den **Erwartungswert**.

Beispiel
Wir spielen ein Glückspiel: Zu Spielbeginn muss jeder Teilnehmer 1 ct Einsatz an die Bank zahlen und eine Zahl zwischen 1 und 6 tippen. Ein Würfel wird geworfen. Erscheint die getippte Zahl, erhält der Spieler von der Bank 5 ct.
Ist das Spiel fair oder gar lukrativ?

Wir interessieren uns für die durchschnittliche Auszahlung pro Spieler und pro Spiel. Wir versuchen, diese experimentell zu bestimmen. Dazu spielen wir viele Spiele, notieren jeweils die Auszahlung und bilden das arithmetische Mittel. So gewinnen wir eine Näherung für den Erwartungswert des Auszahlungsbetrags.
Ein Glücksspiel um Geld ist „fair“, wenn dieser Erwartungswert der Auszahlung gleich dem Einsatz ist. Bei sehr vielen Versuchsdurchgängen sollte man also ebenso viel Geld gewinnen wie verlieren. (Unser obiges Spiel ist nicht fair. Wie könnte man es fair gestalten? Lotto „6 aus 49“ ist auch nicht „fair“, denn schließlich verdienen ja die Lotto-Veranstalter.)

Vergleich der Mittelwerte

Die verschiedenen Mittelwerte sagen jeweils etwas anderes aus. Deshalb sollten im Unterricht beim Arbeiten mit konkretem Datenmaterial auch die Bedeutung der Mittelwerte in der jeweiligen Situation und die Frage der Wahl des „besten“ Mittelwerts thematisiert werden.

Betrachten wir ein **Beispiel:**

In einem Kaufhaus in Münster wurden 446 Kunden nach der Lage ihrer Wohnung befragt. Daraus wurde die Luftlinienentfernung zwischen jeder Kundenwohnung und dem Kaufhaus ermittelt. Es ergab sich eine stark asymmetrische Verteilung, bei der viele kleine und nur wenige große Entfernungen im Bereich zwischen 100 m und 67,6 km auftraten. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

arithmetisches Mittel: 12,5 km
Median: 4,2 km
Modalwert: 1,3 km (wurde 19 Mal angenommen)

Interpretiere diese Werte. Untermauere mit der Statistik insbesondere die Aussage: „Die Hälfte der Kunden kommt aus dem Stadtgebiet von Münster.“

Quelle: Bahrenberg, G., Giese, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen in der Geographie

Auswirkungen von Ausreißern auf die Mittelwerte
„Ausreißer“ sind Daten, die isoliert weit weg von der Mehrzahl der Daten liegen. Modalwert und Median reagieren auf Ausreißer überhaupt nicht. Wenn in obigem Kaufhausbeispiel ein Kunde aus Australien kommt und sich so eine Entfernung von ca. 20000 km ergibt, beeinflusst dies den Modalwert und den Median nicht, das arithmetische Mittel dagegen ausgesprochen stark!

Nach den Lageparametern nun zu Streuungsparametern: Der Erwartungswert gibt zwar an, wo der „Schwerpunkt" einer Verteilung liegt, er liefert aber keine Informationen darüber, wie stark die Werte x_i gestreut sind. Verteilungen können den gleichen Erwartungswert besitzen, aber sich deutlich hinsichtlich der Streuung der einzelnen Werte unterscheiden. Die Stärke der Streuung wird durch die Varianz bzw. die Standardabweichung quantifiziert.

4) Spannweite

Die Spannweite ist das einfachste und anschaulichste Streuungsmaß für Daten:

> Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert einer Datenmenge heißt **Spannweite.**

Im obigen Beispiel mit den Körpermassen ist die Spannweite also 57 kg – 38 kg = 19 kg.

5) Empirische Varianz und empirische Standardabweichung

Hier dient das arithmetische Mittel als Bezugsgröße, um die Streuung der Daten quantitativ zu fassen.

> Seien $x_1, \ldots, x_n$ metrische Daten und $\bar{x}$ ihr arithmetisches Mittel.
>
> Die **empirische Varianz** ist die Zahl $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$,
>
> die **empirische Standardabweichung** ist die Quadratwurzel der Varianz
>
> $$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad .$$

Die Varianz ist ein Maß dafür, wie weit die einzelnen Werte vom Mittelwert entfernt liegen. In der Definition der Varianz ist $x_i - \bar{x}$ der mit einem positiven oder negativen Vorzeichen versehene Abstand des Wertes x_i vom arithmetischen Mittel $\bar{x}$. Damit man nur positive Werte summiert, werden diese Abstände quadriert. Dadurch können sich positive und negative Abstände in der Summe nicht gegenseitig aufheben.

Wenn die Varianz klein ist, müssen alle Summanden klein sein. Die Werte x_i liegen dann nahe beim arithmetischen Mittel.

Die empirische Varianz hat wegen dem Quadrieren eine andere Einheit als die Ausgangsdaten. Haben die Ausgangsdaten etwa wie im obigen Beispiel die Einheit kg, so wird die Varianz in kg² gemessen. Deshalb arbeitet man vor allem mit der empirischen Standardabweichung, sie hat durch das Radizieren wieder die ursprüngliche Einheit.

Beispiel

In obigem Beispiel waren die Körpermassen der neun Schüler

38 kg, 39 kg, 42 kg, 45 kg, 47 kg, 48 kg, 48 kg, 48 kg, 57 kg.

Das arithmetisches Mittel dieser Werte ist $\overline{x} = 45{,}8$ kg.

Gemäß Definition ist die Varianz das arithmetische Mittel der quadrierten Abstände

$$\mathrm{V} \;=\; \tfrac{1}{9}(7{,}8^2 + 6{,}8^2 + 3{,}8^2 + 0{,}8^2 + 1{,}2^2 + 2{,}2^2 + 2{,}2^2 + 2{,}2^2 + 11{,}2^2)\ \mathrm{kg}^2 \;=\; 29\,\mathrm{kg}^2\,.$$

Die Standardabweichung ist die Quadratwurzel der Varianz

$$\mathrm{s} \;=\; \sqrt{\mathrm{V}} \;=\; 5{,}4\,\mathrm{kg}\,.$$

6. Anwendungen von Tabellenkalkulation

Lehrplan RS
M 7.8
Die Schüler sammeln Daten, die sie z.B. bei der Durchführung von Zufallsexperimenten gewinnen. Für die Auswertung nutzen sie ein Tabellenkalkulationsprogramm.

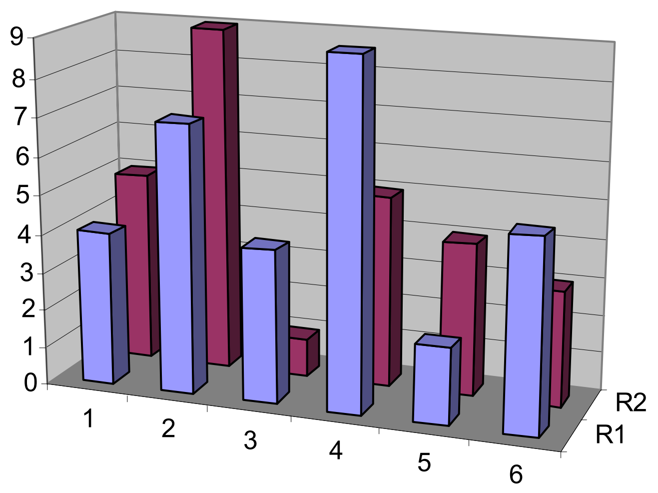
M 9.11
Die Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten, die sie anhand von Simulationen (grafikfähiger Taschenrechner, Tabellenkalkulation, Statistiksoftware) überprüfen.

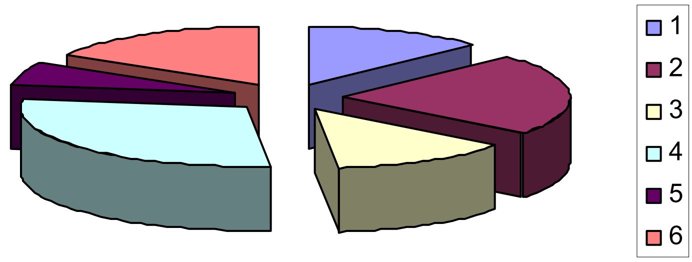
Der Lehrplan hebt Anwendungsfelder von Tabellenkalkulation im Zusammenhang mit Stochastik hervor:

- Tabellenkalkulation zur Erstellung von Diagrammen
- Tabellenkalkulation zur Bestimmung statistischer Kenngrößen
- Tabellenkalkulation zur Simulation von Zufallsexperimenten

6.1 Tabellenkalkulation zur Erstellung von Diagrammen

Tabellenkalkulationsprogramme bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Erstellung und Gestaltung von Diagrammen, um Daten übersichtlich darzustellen. Da es sich dabei um sehr allgemeine und weit verbreitete Funktionen derartiger Programme handelt, wird auf diesen Aspekt von Tabellenkalkulation hier nicht weiter eingegangen.





6.2 Tabellenkalkulation zur Bestimmung statistischer Kenngrößen

Die Bestimmung statistischer Kenngrößen wie der Varianz oder der Standardabweichung ist für umfangreichere Datenmengen rechnerisch aufwändig. Hier helfen die entsprechenden Funktionen an Taschenrechnern oder auch Tabellenkalkulationsprogramme weiter.

In EXCEL sind beispielsweise folgende Funktionen implementiert, mit denen schulrelevante statistische Kenngrößen direkt berechnet werden können.

EXCEL-Funktion	**Bedeutung**
MITTELWERT()	arithmetisches Mittel
MEDIAN()	Median
MODUS()	Modalwert
VARIANZEN()	Varianz
STABWN()	Standardabweichung
MAX()-MIN()	Spannweite

Beispiele:

- =MITTELWERT(A1:A10) ermittelt das arithmetische Mittel der Werte in den Zellen A1, A2, …, A10.
- =MEDIAN(A1;A5;A7) berechnet den Median der Zahlen in den Zellen A1, A5 und A7.
- =STABWN(A1:A3;A7) berechnet die Standardabweichung der Zahlen in den Zellen A1 bis A3 und A7.

Experimentieren Sie mit diesen Funktionen!

Überlegen Sie sich Unterrichtssituationen, in denen Daten mit diesen EXCEL-Funktionen sinnvoll ausgewertet werden können.

6.3 Tabellenkalkulation zur Simulation von Zufallsexperimenten

Tabellenkalkulationsprogramme bieten auch die Möglichkeit, Zufallsexperimente am Computer zu simulieren und auszuwerten. So lassen sich

- mathematische Zusammenhänge experimentell entdecken bzw.
- theoretisch hergeleitete Resultate experimentell überprüfen.

Zum Erzeugen von Zufallszahlen ist folgende EXCEL-Funktion implementiert:

EXCEL-Funktion	**Bedeutung**
ZUFALLSZAHL()	Zufallszahl im Intervall [0; 1[

Beispiele:

- =ZUFALLSZAHL() ergibt eine Zufallszahl im Intervall [0; 1[.
- =b*ZUFALLSZAHL() + a liefert eine Zufallszahl im Intervall [a; a+b[.
- =GANZZAHL(2*ZUFALLSZAHL()) ergibt eine Zufallszahl aus der Menge {0; 1}. Damit lässt sich das Werfen einer Münze simulieren.
- =GANZZAHL(6*ZUFALLSZAHL()+1) ergibt eine Zufallszahl aus der Menge {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Damit lässt sich Würfeln simulieren.

Unterrichtsbeispiel 1: Simulation von Münzwürfen, absolute und relative Häufigkeit

Das Werfen einer Münze lässt sich simulieren, indem man Zufallszahlen aus {0; 1} erzeugt. Der Wert 0 kann etwa für den Ausgang „Zahl“, der Wert 1 für das Ergebnis „Kopf“ stehen.
Mit der folgenden EXCEL-Tabelle wird das Werfen einer Münze wiederholt simuliert, es wird die absolute Anzahl der Ausgänge „Kopf“ gezählt und die zugehörige relative Häufigkeit berechnet.

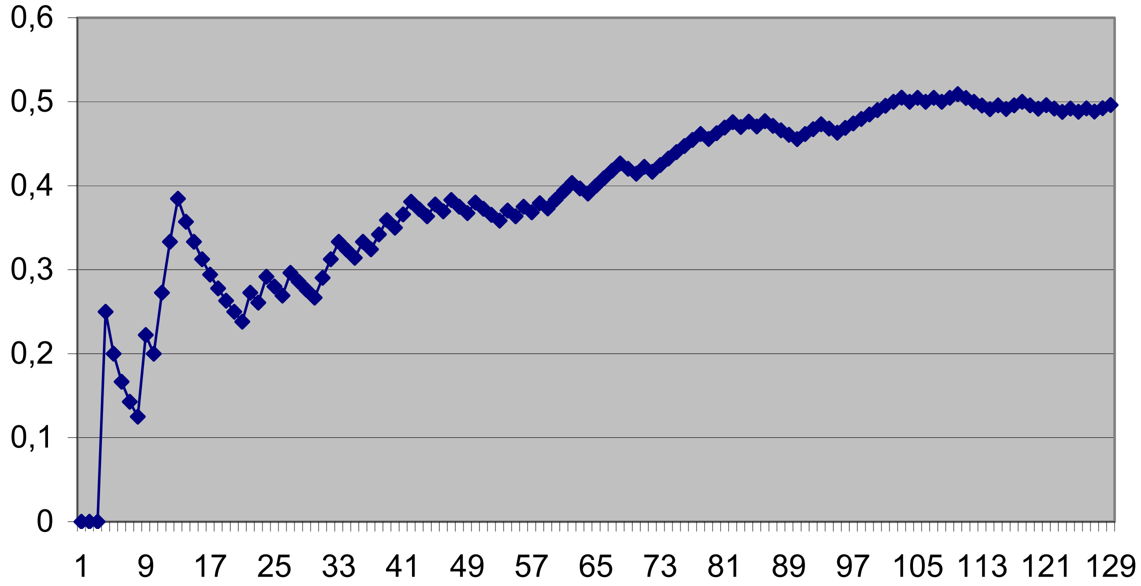
	A	B	C	D
1	Wurf Nr.	Kopf	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
2	1	=GANZZAHL(2*ZUFALLSZAHL())	=B2	=C2/A2
3	=A2+1	=GANZZAHL(2*ZUFALLSZAHL())	=C2+B3	=C3/A3
4	=A3+1	=GANZZAHL(2*ZUFALLSZAHL())	=C3+B4	=C4/A4
5	=A4+1	=GANZZAHL(2*ZUFALLSZAHL())	=C4+B5	=C5/A5
	…	…	…	…

In der ersten Spalte wird die Zahl der Würfe angegeben. Die zugehörige Zelle in der zweiten Spalte erhält zufällig 1 (für „Kopf“) oder 0 (für „Zahl“). In der dritten Spalte wird gezählt, wie oft „Kopf“ gefallen ist. In der vierten Spalte wird die jeweilige relative Häufigkeit des Ereignisses „Kopf“ bestimmt.

In einen konkreten Fall ergaben sich beispielsweise folgende Werte:

	A	B	C	D
1	Wurf Nr.	Zufallszahl	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
2	1	1	1	1
3	2	0	1	0,5
4	3	1	2	0,666666667
5	4	0	2	0,5
	…	…	…	…

Beobachtung:
Nach vielen Münzwürfen (mehrere Hundert) lässt sich beobachten, dass sich die relative Häufigkeit um den Wert 0,5 stabilisiert. Die zugehörigen Werte in Spalte D können direkt in einem EXCEL-Diagramm dargestellt werden. So wird die Entwicklung der relativen Häufigkeit mit zunehmender Zahl der Würfe deutlich sichtbar, z.B.:

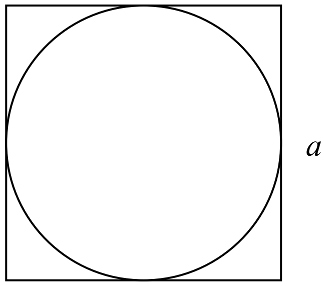


Tipp
Eine mit EXCEL erstellte Simulation kann jeweils mit der Funktionstaste F9 neu gestartet werden. Mit dieser Taste werden Formeln neu berechnet, insbesondere Zufallszahlen neu erzeugt.

Variationen
Variieren Sie die Thematik, indem Sie etwa das Werfen von Würfeln oder von „gezinkten" Münzen simulieren.

Unterrichtsbeispiel 2: Regentropfen auf ein Quadrat

Auf ein Quadrat fallen zufällig Regentropfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen sie in den einbeschriebenen Kreis?



Diesem Problem kann man sich von zwei Seiten nähern:

- Durch Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Geometrie,
- durch eine Simulation und die Bestimmung der relativen Häufigkeit.

Kombiniert man beide Zugänge, so erhält man sogar eine Möglichkeit, die Kreiszahl π mit Hilfe der Stochastik näherungsweise zu bestimmen.

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Geometrie

Zentral ist die Erkenntnis, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich dem Anteil der Kreisfläche an der Quadratfläche ist:

$$P(A) \;=\; \frac{\textit{Flächeninhalt des Kreises}}{\textit{Flächeninhalt des Quadrats}} \;=\; \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{a^2} \;=\; \frac{\pi}{4} \;\approx\; 79\%$$

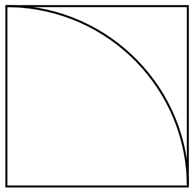
b) Experimentelle Bestimmung der Kreiszahl π

Wir simulieren das Fallen der Regentropfen (beispielsweise mittels des Zufallszahlengenerators eines Computers) und zählen, wie viele Tropfen dabei in den Kreis fallen.
Die zugehörige relative Häufigkeit verwenden wir als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit:

$$h_n(A) \;\approx\; P(A) \;=\; \frac{\pi}{4}\;, \qquad \text{also} \qquad \pi \;\approx\; 4 \cdot h_n(A)\,.$$

c) Simulation mit Tabellenkalkulation

Die Simulation der fallenden Regentropfen geschieht mit Zufallszahlen: Zwei Zufallszahlen geben die Koordinaten eines Tropfens in der Koordinatenebene an.



Der Einfachheit halber wird ein Kreis mit dem Radius 1 gewählt, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Zudem wird nur das Kreisviertel betrachtet, das im ersten Quadranten liegt.
Die zufällig auf das Quadrat fallenden Regentropfen besitzen also x- und y-Koordinaten zwischen 0 und 1.
Ein Tropfen liegt gemäß dem Satz des Pythagoras genau dann im Kreis, wenn $x^2 + y^2 \leq 1$.

In der folgenden EXCEL-Tabelle ist dies realisiert:

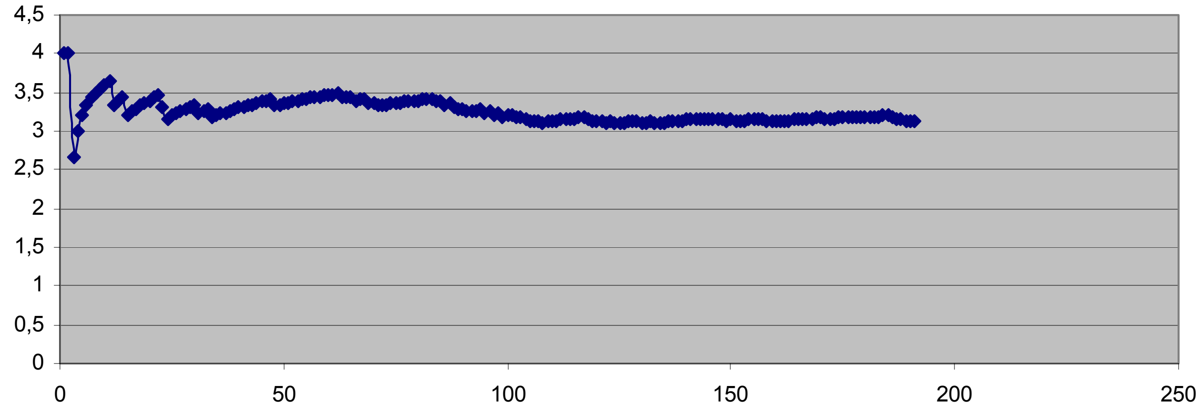
	A	B	C	D	E	F	G
1	Wurf Nr.	x-Wert	y-Wert	Test, ob im Kreis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Näherung pi
2	1	=ZUFALLSZAHL()	=ZUFALLSZAHL()	=WENN(B2^2+C2^2<=1;1;0)	=D2	=E2/A2	=F2*4
3	=A2+1	=ZUFALLSZAHL()	=ZUFALLSZAHL()	=WENN(B3^2+C3^2<=1;1;0)	=E2+D3	=E3/A3	=F3*4
4	=A3+1	=ZUFALLSZAHL()	=ZUFALLSZAHL()	=WENN(B4^2+C4^2<=1;1;0)	=E3+D4	=E4/A4	=F4*4
5	=A4+1	=ZUFALLSZAHL()	=ZUFALLSZAHL()	=WENN(B5^2+C5^2<=1;1;0)	=E4+D5	=E5/A5	=F5*4
	…	…	…	…		…	…

In der ersten Spalte werden die simulierten Regentropfen gezählt. Die Zellen in den Spalten B und C erhalten die zufällig erzeugten Koordinaten der Regentropfen.
In Spalte D wird mit der Pythagoras-Bedingung getestet, ob ein Tropfen im Kreis liegt. Ist dies der Fall, so erhält die Zelle den Wert 1, ansonsten den Wert 0.
In Spalte E wird gezählt, wie viele Tropfen insgesamt in den Kreis gefallen sind. Damit wird in Spalte F die relative Häufigkeit angegeben.
Nach den Überlegungen in b) ist das Vierfache der relativen Häufigkeit ein Näherungswert für die Kreiszahl π.

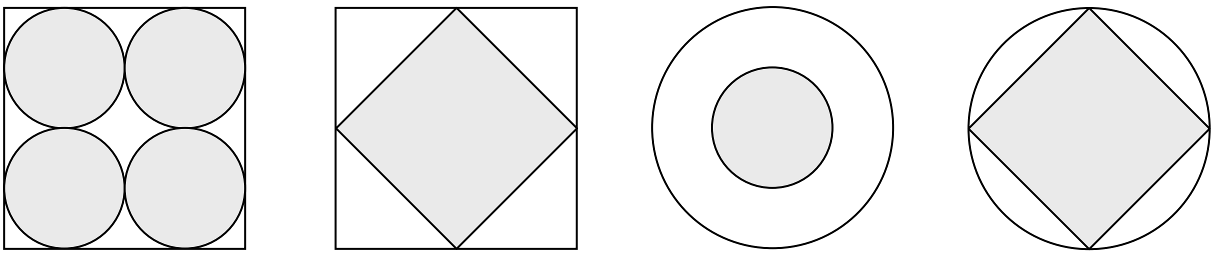
In einem konkreten Beispiel ergeben sich etwa folgende Werte:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wurf Nr.	x-Wert	y-Wert	Test, ob im Kreis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Näherung pi
2	1	0,9880666	0,0133905	1	1	1	4
3	2	0,7200486	0,8088707	0	1	0,5	2
4	3	0,1310891	0,6380455	1	2	0,66666667	2,66666667
5	4	0,4567005	0,4669619	1	3	0,75	3
	…	…	…	…		…	…

Beobachtung:
Mit vielen Regentropfen (mehrere Hundert oder Tausend) lässt sich beobachten, dass sich die relative Häufigkeit um den Wert 0,79 stabilisiert. So ergeben sich Näherungen für die Kreiszahl π. Die zugehörigen Werte in Spalte F oder G können direkt in einem EXCEL-Diagramm dargestellt werden. Auf diese Weise wird die Entwicklung der relativen Häufigkeiten bzw. der Näherungswerte für π mit zunehmender Zahl der Würfe deutlich sichtbar, z.B.:



Variationen
Variieren Sie die Thematik, indem Sie andere Flächen betrachten. Einige Anregungen:



Schlussgedanken

Warum fallen Erwachsenen selbst einfach strukturierte stochastische Fragen in der Regel schwer? (Z.B.: „Auf wie viele Arten können sich drei Personen zu einem Foto nebeneinander stellen?“)

→ Sie haben in ihrer eigenen Schulzeit nie ihr Denken in stochastischer Hinsicht geschult.
Oder:
→ Sie haben sich (gemäß den alten Lehrplänen) erstmals in der 12. Jahrgangsstufe des Gymnasiums mit stochastischen Themen befasst. Zu diesem Zeitpunkt war die Entwicklung ihres Denkens aber bereits so weit fortgeschritten, dass die Fähigkeit zu stochastischem Denken nicht mehr tief verankert werden konnte.

Diesen Zustand gilt es für die kommenden Generationen zu ändern! Die aktuellen Grundschul-, Realschul- und Gymnasiallehrpläne bieten hierfür eine geeignete Basis.

Wie kann man sich in Flugzeugen vor Bombenattentaten schützen?
Man nehme selbst eine Bombe mit, denn die Wahrscheinlichkeit, dass *zwei* Bomben an Bord sind, ist äußerst gering.

Literatur und Links

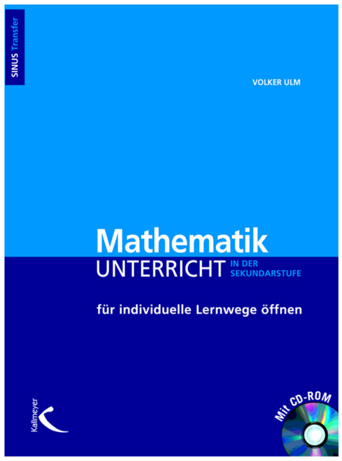
Aufgabendatenbank SMART

Die Datenbank SMART enthält eine Fülle von Aufgaben für den Mathematikunterricht, die online zu Arbeitsblättern zusammengestellt werden können. In Zusammenhang mit Stochastik ist vor allem ein Blick in den Bereich SINUS-Transfer lohnend. Alle Aufgaben in SMART sind kostenfrei erhältlich. Man erreicht die Datenbank unter:

http://did.mat.uni-bayreuth.de/smart

Didaktische Konzepte zum Mathematikunterricht

Die vorliegende Handreichung legt den Schwerpunkt deutlich auf fachliche, mathematische Aspekte der Stochastik in der Realschule. Fragen der methodischen Gestaltung von Unterricht werden hier bewusst ausgeklammert. Allerdings bietet gerade der Stochastikunterricht viele Möglichkeiten, die Schüler selbständig und kooperativ Mathematik entdecken zu lassen. Didaktische Konzepte für Mathematikunterricht, der auf individuelle Lernwege der Schüler Wert legt (z.B. mit offenen Aufgaben, Lernzirkeln, …), finden sich in dem Buch:



Ulm, V.: Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen, Sekundarstufe, Kallmeyer Verlag, Seelze 2005, ISBN 3 7800 4939-2

Weitere Informationen dazu sind auch in Internet erhältlich unter:

http://z-mnu.uni-bayreuth.de/mathematik/kallmeyer

Fachdidaktische Literatur zur Stochastik

Henn, H.-W., Büchter, A.: Elementare Stochastik, Mathematik für das Lehramt, Springer Verlag, Berlin 2005
(ein neu erschienenes Buch für das Lehramtsstudium)

Henze, N.: Elementare Stochastik, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2004
(ein einführendes Lehrbuch für das Studium)

Kütting, Herbert: Elementare Stochastik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1999
(ein neueres Lehrwerk, das einfach lesbar in der Stochastik einführt, mit Übungsaufgaben und Lösungen, für die Ausbildung von Grund- und Hauptschullehrkräften konzipiert)

Kütting, Herbert: Didaktik der Stochastik, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994
(ein Standardwerk zur Didaktik der Stochastik, das reichhaltige didaktische Überlegungen beinhaltet)

Kütting, Herbert: Beschreibende Statistik im Schulunterricht, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994
(viele Ideen und Materialien für Statistik in der Schule, Daten nicht mehr ganz aktuell)