UNIVERSITÄT
BAYREUTH

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

Werner Heubeck • Edgar Höniger

Mathematik

Ein Beutel voller Experimente

+++ Frei verwendbar für Unterrichts- und Forschungszwecke +++

Autoren	Werner Heubeck, Edgar Höniger
Titel	Mathematik – Ein Beutel voller Experimente Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik Universität Bayreuth Bayreuth, 2011
Gestaltung	Dr. Carsten Miller, Universität Bayreuth
Satz und Layout	www.gaube-media.de
Bezugsquelle	Der *Beutel voller Experimente* ist erhältlich bei Traudl Riess KG St. Georgen Straße 6 95463 Bindlach Internet www.traudl-riess.de Telefon +49 (0) 92 08-91 19 Telefax +49 (0) 92 08-15 73 E-Mail info@traudl-riess.de

www.fibonacci-project.eu

gefördert durch das 7. Rahmenprogramm
der Europäischen Kommission

Werner Heubeck • Edgar Höniger

Mathematik

Ein Beutel voller Experimente

Vorwort

Im Modul 9 des Sinus-Transfer-Projektes „Verantwortung für das eigene Lernen stärken“ heißt es in der Einleitung: Don‘t preach facts, stimulate acts. Diese Devise von Paul Halmos stellt ebenso einen Schwerpunkt im Fibonacci-Projekt dar, das sich mit dem „inquiry based learning“, was so viel bedeutet wie „forschend-entdeckendes Lernen“, intensiv auseinandersetzt.

Die zehn Experimente im *Beutel voller Experimente* regen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht an, selbständig tätig zu werden. Anregungen, Arbeitsaufträge, Arbeitsblätter und auch Lösungen sind zusammen mit Kopiervorlagen in dieser Begleitbroschüre zusammengefasst.

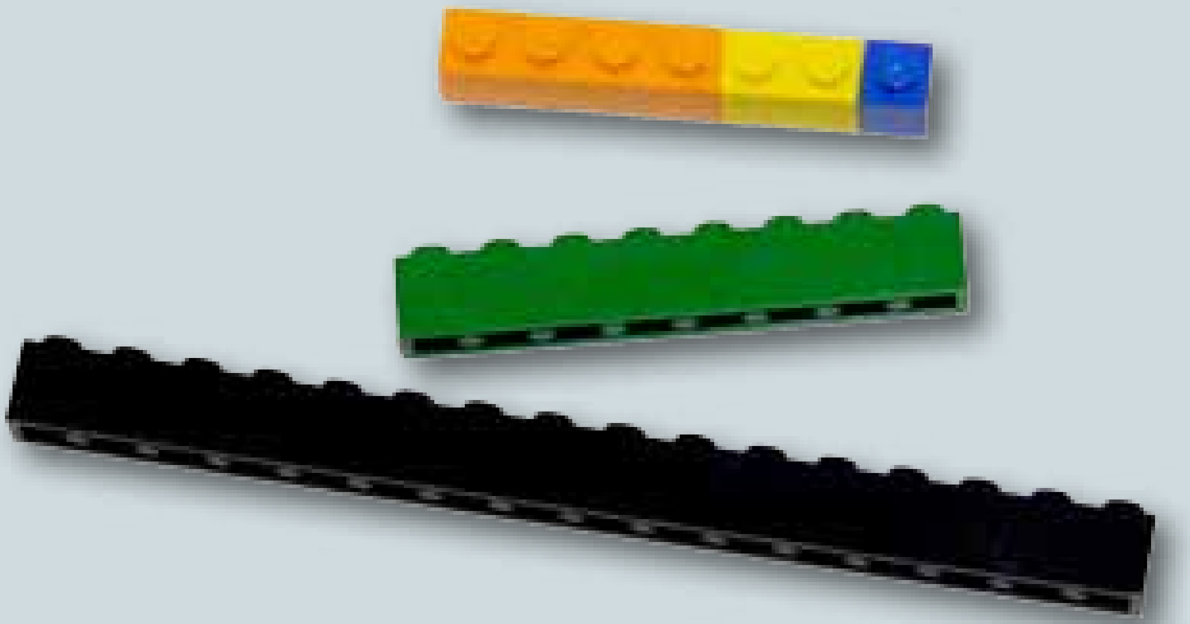
Die Schülerinnen und Schüler nähern sich auf spielerische Weise den jeweiligen Themenkreisen. Bei intensiverer Beschäftigung treffen sie jedoch auch auf anspruchsvolle mathematische Problemstellungen, die in den Lehrplänen verankert sind.

Auch fachfremd unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen geben wir mit dem *Beutel voller Experimente* Möglichkeiten an die Hand, mathematische Inhalte interessant und gleichzeitig „begreifbar“ zu gestalten. Vertretungsstunden, Projekte und Lernzirkel bieten weitere Einsatzmöglichkeiten.

Bayreuth, im September 2011

Werner Heubeck & Edgar Höniger

Mit Lego rechnen

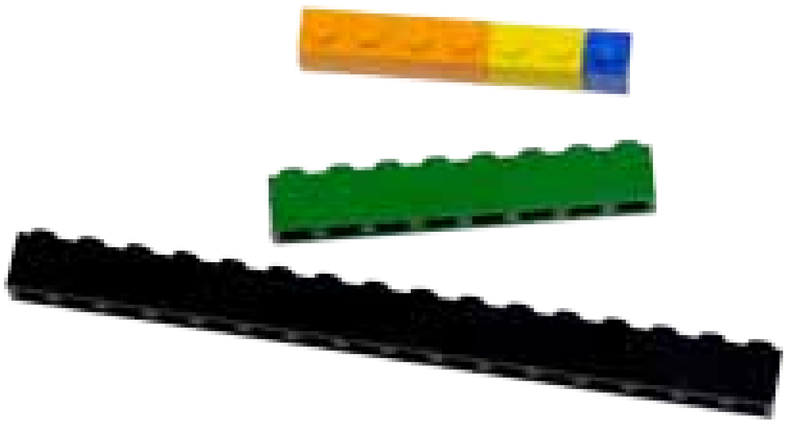


1

Material

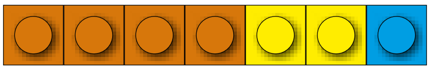
- 5 verschiedene Legosteine mit
  1, 2, 4, 8 und 16 Noppen

Mit Lego rechnen



Das Experiment

▸ Lege die Legosteine wie in der folgenden Abbildung so aneinander, dass eine Reihe mit 7 Noppen entsteht.



Die zugehörige Rechnung lautet dann: 7 = 4 + 2 + 1

▸ Lege die Legosteine so aneinander, dass Reihen mit folgenden Noppenzahlen entstehen. Notiere die entsprechenden Rechnungen.

3 = ____________________

6 = ____________________

9 = ____________________

10 = ____________________

15 = ____________________

27 = ____________________

▸ Wie viele Noppen enthält die längste Reihe? __________

- Gibt es zwischen 1 und der größten Noppenzahl eine, die sich nicht aus den vorhandenen Legosteinen legen lässt? Notiere deine Antwort.

____

____

____

- Wie viele Noppen müsste ein Legostein besitzen, der die Reihe aus den vorhandenen Steinen logisch fortsetzt?
  Notiere dein Ergebnis auch in Potenzschreibweise.

____

- Schreibe auch jeweils die Anzahl der Noppen der vorhandenen Steine als Potenz mit möglichst kleiner Basis.

16 = ____

8 = ____

4 = ____

2 = ____

1 = ____

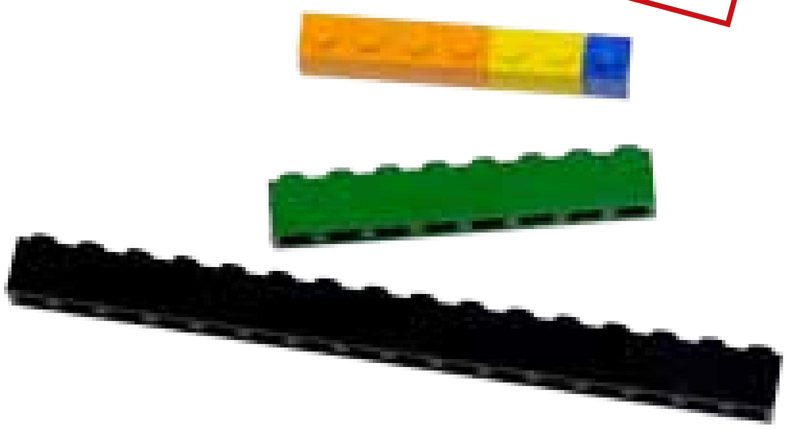
- Wie viele Noppen enthält jetzt die längste Reihe? ________

- Gib die zugehörige Rechnung mit 55 Noppen an.

55 = ______________

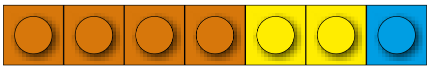
Lösungen

Mit Lego rechnen



Das Experiment

- Lege die Legosteine wie in der folgenden Abbildung so aneinander, dass eine Reihe mit 7 Noppen entsteht.



Die zugehörige Rechnung lautet dann: 7 = 4 + 2 + 1

- Lege die Legosteine so aneinander, dass Reihen mit folgenden Noppenzahlen entstehen. Notiere die entsprechenden Rechnungen.

3 = ***2 + 1***

6 = ***4 + 2***

9 = ***8 + 1***

10 = ***8 + 2***

15 = ***8 + 4 + 2 + 1***

27 = ***16 + 8 + 2 + 1***

- Wie viele Noppen enthält die längste Reihe? ***31***

Lösungen

▸ Gibt es zwischen 1 und der größten Noppenzahl eine, die sich nicht aus den vorhandenen Legosteinen legen lässt? Notiere deine Antwort.

Nein, denn durch systematisches Probieren kann jede Noppenzahl gelegt werden.

▸ Wie viele Noppen müsste ein Legostein besitzen, der die Reihe aus den vorhandenen Steinen logisch fortsetzt?
Notiere dein Ergebnis auch in Potenzschreibweise.

$32 = 2^5$

▸ Schreibe auch jeweils die Anzahl der Noppen der vorhandenen Steine als Potenz mit möglichst kleiner Basis.

$16 = 2^4$

$8 = 2^3$

$4 = 2^2$

$2 = 2^1$

$1 = 2^0$

▸ Wie viele Noppen enthält jetzt die längste Reihe? ***63***

▸ Gib die zugehörige Rechnung mit 55 Noppen an.

$55 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1$

Material

- 5 verschiedenfarbige Legosteine mit 1, 2, 4, 8 und 16 Noppen

Didaktische Hinweise

- Potenzen kann man mit verschiedenen Basen darstellen.
- Potenzen mit der Basis 2 führen zum Dualsystem hin.
- Der Sonderfall $2^0 = 1$ ergibt sich aus der logischen Fortsetzung der aufgelisteten Beispiele.
- Das Dualsystem dient auch der Hinführung zu weiteren Stellenwertsystemen in der Informatik (z.B. Hexadezimalsystem).

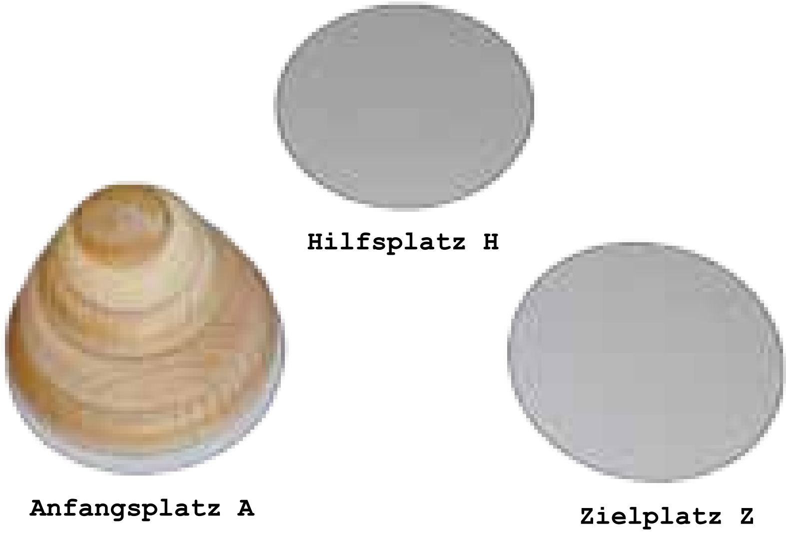
Der Turm von Hanoi

2

Material

- 5 Holzscheiben
  (mit verschiedenen Durchmessern)
- Kopiervorlage

Der Turm von Hanoi



Das Experiment

Alle Scheiben sind zunächst wie im Bild gestapelt. Der Stapel soll vom Anfangsplatz A zum Zielplatz Z mit möglichst wenigen Zügen so umgeschichtet werden, dass er wieder so aussieht wie oben dargestellt.

Es gelten folgende Regeln:

Es darf bei jedem Zug nur eine Scheibe versetzt werden.

Es darf immer nur eine kleinere auf eine größere Scheibe gelegt werden.
Dazu brauchst du manchmal den Hilfsplatz H.

▸ Nummeriere die fünf Scheiben mit 1, 2, 3, 4 und 5 so durch, dass die Scheibe 1 den kleinsten und die Scheibe 5 den größten Durchmesser besitzt.

▸ Experimentiere zunächst mit den Scheiben 1 und 2. Ergänze die Tabelle. Notiere die notwendige Anzahl der Züge.

Scheibe Nr.	1			
kommt auf Platz	H			

Anzahl der Züge: ___________

▸ Experimentiere jetzt mit den Scheiben 1, 2 und 3.

Scheibe Nr.									
kommt auf Platz									

Anzahl der Züge: __________

- Verwende jetzt die Scheiben 1, 2, 3 und 4.
  Ordne sie vorerst nur so weit um, bis auf dem Zielplatz Z die größte Scheibe 4 alleine liegt und du gleichzeitig auf dem Hilfsplatz H einen Turm aus den drei restlichen Scheiben in der richtigen Reihenfolge aufgebaut hast. Ergänze die Tabelle nur bis dahin:

Scheibe Nr.												
kommt auf Platz												

Anzahl der Züge bis dahin: __________

- Überlege dir jetzt, wie viele Züge noch benötigt werden, bis die Aufgabe ganz erfüllt ist. Betrachte dazu nochmals das Experiment mit drei Scheiben. Begründe deine Antwort.

Es werden noch ____________ Züge benötigt, denn

____

____

- Wie viele Züge sind bei fünf Scheiben notwendig? Begründe deine Antwort.

____

____

- Ordne den Turm mit fünf Scheiben vom Ausgangsplatz zum Zielplatz. Stelle dir vor, der Turm steht vollständig aufgebaut neben den Plätzen und der Transport dieses Turmes auf den Anfangsplatz A gilt als zusätzlicher Zug.

- Ergänze die Tabelle.

Anzahl der Scheiben	2	3	4	5
Anzahl der Züge				
Schreibweise als Potenz				

- Du hast n Scheiben zur Verfügung. Gib jetzt die Mindestzahl der Züge einmal mit und einmal ohne Zusatzzug an:

  Zahl der Züge mit Zusatzzug: __________ ohne Zusatzzug: __________

Die Sage berichtet von einem Tempel in Südostasien, in dem sich ein Mönch mit einem solchen Turm aus 64 Scheiben beschäftigt. Nimm an, er benötigt für jeden Zug eine Sekunde.

- Gib die benötigte Zeit, bis das Werk getan ist, in Potenzschreibweise an:

  t = __________

- Wie lange braucht der Mönch vermutlich? ______________________________

- Berechne näherungsweise die benötigte Zeit in Sekunden.
  Verwende dabei $2^4 = 16$ und $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$.

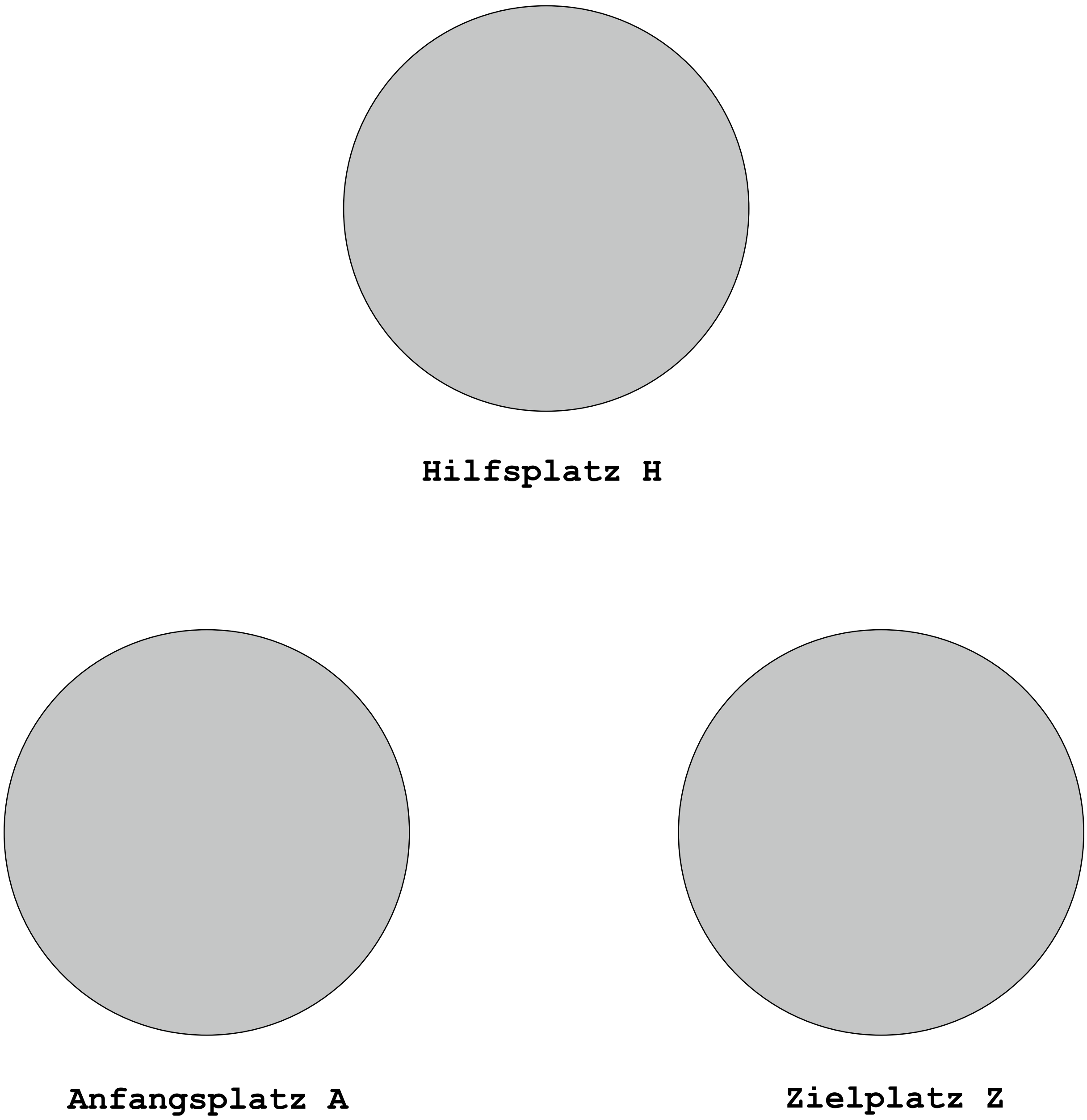
  t = __________

- Berechne die benötigte Zeit näherungsweise in Jahren.

  t ≈ __________

- Vergleiche dein Ergebnis mit anderen passenden Zeitspannen.

Kopiervorlage



Material

- 5 Holzscheiben (mit verschiedenen Durchmessern)
- Kopiervorlage

Didaktische Hinweise

- Rechnungen führen zu Potenzen mit der Basis 2.
- Potenzen mit großen Exponenten werden als Maßzahlen in physikalischen Größen abgeschätzt (z.B. $(2^{64} - 1)$ s $\approx$ 584 942 417 355 a).
- Ein analoges Beispiel besteht in der Anzahl der Reiskörner auf einem Schachbrett.

Der Turm von Hanoi

- Jede der n Scheiben bekommt eine Nummer: 1; 2; 3; … ; n.
- Die Nummer gibt gleichzeitig über den Durchmesser der betreffenden Scheibe Auskunft:

  $1 < 2 < 3 < \ldots < n$

  Anfangs stehen alle Scheiben auf dem Anfangsplatz A.
  Natürlich werden wir nicht mit einem Turm aus einer einzigen Scheibe starten, aber für die Systematik ist dieser Fall dennoch von Bedeutung.

(1) Die Umverteilung von einer Scheibe:

Scheibe Nr.	1
kommt auf Platz	Z

Die Mindestzahl der Züge beträgt $k_1 = 1$

(2) Die Umverteilung von zwei Scheiben:

Scheibe Nr.	1	2	1
kommt auf Platz	H	Z	Z

Die Mindestzahl der Züge beträgt $k_2 = 2 + 1 = 3$ = Anzahl der Nummernspalten.

(3) Die Umverteilung von drei Scheiben:

1. Zug: Nehmen wir die oberste Scheibe 1 weg, dann müssen anschließend noch die beiden Scheiben 2 und 3 umverteilt werden. Das ist aber schon im Fall mit zwei Scheiben beschrieben. Die Scheibe 1 darf beim ersten Zug nicht auf H landen, denn dieser Platz ist beim nächsten Zug für die Scheibe 2 reserviert.

Also:

Scheibe Nr.	1	2	1
kommt auf Platz	Z	H	H

An dieser Stelle können wir innehalten, denn wir stehen vor der Ausgangsstellung mit zwei Scheiben, mit dem Unterschied, dass im Fall mit drei Scheiben momentan der Stapel aus zwei Scheiben auf dem H-Platz steht und dass auf dem Z-Platz schon die größte Scheibe allein liegt und nicht mehr angetastet wird.

Daher laufen die restlichen Züge so wie im Fall mit zwei Scheiben ab, wobei jetzt die Bedeutung von A und H austauschbar ist.

Anmerkung:
Die Aufgabe könnte vereinfacht so lauten: „Transportiere den Turm regelgerecht von seinem Ausgangsplatz auf einen der beiden freien Plätze."
Die Festlegungen A, H und Z für die drei Plätze erleichtern nur die Notation der Züge.

Zurück zum Fall mit drei Scheiben: Damit die Scheibe mit dem größten Durchmesser an ihr Ziel gelangt, brauchen wir vier Züge. Nach dem Fall mit zwei Scheiben sind dann noch drei Züge nötig, um die zwei Scheiben von ihrer Warteposition H nach Z zu transportieren.

Also gilt: $k_3 = 4 + 3$. Rückblickend gilt: $k_3 = k_2 + 4$.

(4) Die Umverteilung von vier Scheiben:

Wir arbeiten wieder darauf hin, dass die größte Scheibe Platz Z erreicht und allein daliegt. Es lohnt sich, den ersten Zug zu überdenken:

Fall (1): 1 → Z Fall (2): 1 → H Fall (3): 1 → Z

Also gilt für den ersten Zug (mit Scheibe 1) offensichtlich die folgende Regel: Ist n ungerade, dann wird 1 auf Z gesetzt. Für eine gerade Anzahl an Scheiben zieht 1 auf H.
Wird diese Regel nicht befolgt, dann landet der Stapel am Ende auf H statt auf Z.

Scheibe Nr.	1	2	1	3	1	2	1	4
kommt auf Platz	H	Z	Z	H	A	H	H	Z

Bis dahin sind also acht Züge nötig. An dieser Stelle machen Potenzen mit der Basis 2 auf sich aufmerksam. Die größte Scheibe liegt wieder allein am richtigen Platz, danach können wir die restlichen drei Scheiben, die alle regelgerecht in H aufgetürmt sind, nach dem Schema (2) bewegen. Es folgt dann: $k_4 = 8 + 7 = k_3 + 8$.

(n) Um die Mindestzahl der Züge für n Scheiben zu ermitteln, könnte man die folgende Hilfestellung geben:
Nimm an, dass der ganze Turm zunächst außerhalb der Kopiervorlage aufgebaut worden ist. Werte dann den Transport dieses ganzen Turmes auf den Platz A als einen zusätzlichen Zug.
Fülle unter dieser Annahme die folgende Tabelle aus: (Das ist schon die Lösung!)

Anzahl der Scheiben	1	2	3	4	...	n
Anzahl der Züge	2	4	8	16	...	–
Anzahl als Potenz	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^n

Damit gilt für die Mindestzahl k_n an Zügen mit n Scheiben ohne den Anfangszug:

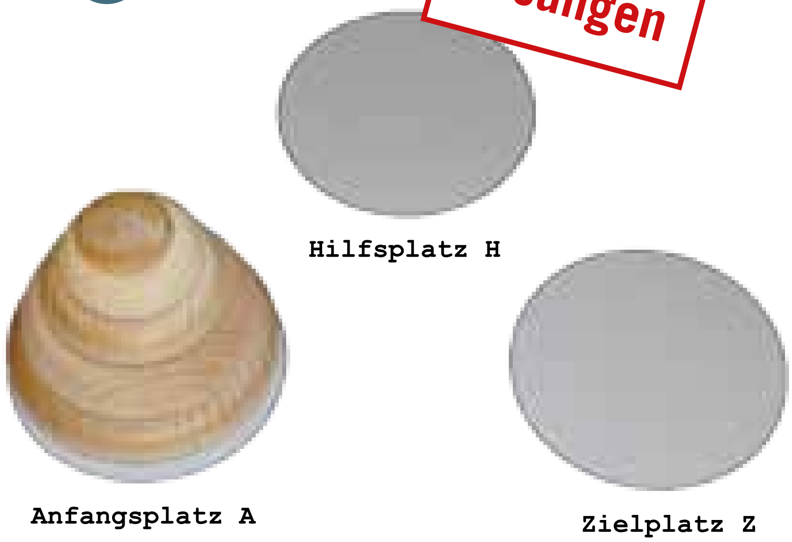
$$k_n = 2^n - 1$$

Rückblickend ergibt sich auch:

$$k_n = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

Lösungen

Der Turm von Hanoi



Das Experiment

Alle Scheiben sind zunächst wie im Bild gestapelt. Der Stapel soll vom Anfangsplatz A zum Zielplatz Z mit möglichst wenigen Zügen so umgeschichtet werden, dass er wieder so aussieht wie oben dargestellt.

Es gelten folgende Regeln:

Es darf bei jedem Zug nur eine Scheibe versetzt werden.

Es darf immer nur eine kleinere auf eine größere Scheibe gelegt werden.
Dazu brauchst du manchmal den Hilfsplatz H.

- Nummeriere die fünf Scheiben mit 1; 2; 3; 4; 5 so durch, dass die Scheibe 1 den kleinsten und die Scheibe 5 den größten Durchmesser besitzt.
- Experimentiere zunächst mit den Scheiben 1 und 2. Ergänze die Tabelle. Notiere die notwendige Anzahl der Züge.

Scheibe Nr.	1	*2*	*1*
kommt auf Platz	H	*Z*	*Z*

Anzahl der Züge: *3*

- Experimentiere jetzt mit den Scheiben 1, 2 und 3.

Lösungen

Scheibe Nr.	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*
kommt auf Platz	*Z*	*H*	*H*	*Z*	*A*	*Z*	*Z*

Anzahl der Züge: ***7***

- Verwende jetzt die Scheiben 1, 2, 3 und 4.
  Ordne sie vorerst nur so weit um, bis auf dem Zielplatz Z die größte Scheibe 4 allein liegt und du gleichzeitig auf dem Hilfsplatz H einen Turm aus den drei restlichen Scheiben in der richtigen Reihenfolge aufgebaut hast. Ergänze die Tabelle nur bis dahin:

Scheibe Nr.	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*4*				
kommt auf Platz	*H*	*Z*	*Z*	*H*	*A*	*H*	*H*	*Z*				

Anzahl der Züge bis dahin: ***8***

- Überlege dir jetzt, wie viele Züge noch benötigt werden, bis die Aufgabe ganz erfüllt ist. Betrachte dazu nochmals das Experiment mit zwei Scheiben. Begründe deine Antwort.

Es werden noch ***7*** Züge benötigt, denn

für die Umordnung der restlichen drei Scheiben werden wie oben 7 Züge benötigt.

Scheibe Nr.	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*4*	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*
kommt auf Platz	*H*	*Z*	*Z*	*H*	*A*	*H*	*H*	*Z*	*Z*	*A*	*A*	*Z*	*H*	*Z*	*Z*

- Wie viele Züge sind bei fünf Scheiben notwendig? Begründe deine Antwort.

Es sind 31 Züge notwendig. Wir experimentieren zunächst so lang, bis die Scheibe 5 auf dem Zielplatz liegt.

Lösungen

Scheibe Nr.	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*4*	*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*5*
kommt auf Platz	*Z*	*H*	*H*	*Z*	*A*	*Z*	*Z*	*H*	*H*	*A*	*A*	*H*	*Z*	*H*	*H*	*Z*

Es sind bis dahin 16 Züge erforderlich. Für die Umordnung der restlichen vier Scheiben werden wie oben 15 Züge benötigt. Also braucht man insgesamt 31 Züge.

- Ordne den Turm mit fünf Scheiben vom Ausgangsplatz zum Zielplatz.
- Stelle dir vor, der Turm steht vollständig aufgebaut neben den Plätzen und der Transport dieses Turmes auf den Anfangsplatz A gilt als zusätzlicher Zug.
- Ergänze die Tabelle.

Anzahl der Scheiben	2	3	4	5
Anzahl der Züge	***4***	***8***	***16***	***32***
Schreibweise als Potenz	2^2	2^3	2^4	2^5

- Du hast n Scheiben zur Verfügung. Gib jetzt die Mindestzahl der Züge einmal mit und einmal ohne Zusatzzug an:

  Zahl der Züge mit Zusatzzug: 2^n ohne Zusatzzug: $2^n - 1$

Die Sage berichtet von einem Tempel in Südostasien, in dem sich ein Mönch mit einem solchen Turm aus 64 Scheiben beschäftigt. Nimm an, er benötigt für jeden Zug eine Sekunde.

- Gib die benötigte Zeit, bis das Werk getan ist, in Potenzschreibweise an:

  t = $(2^{64} - 1)$ s

- Wie lange braucht der Mönch vermutlich? ***Schülerantwort***
- Berechne näherungsweise die benötigte Zeit in Sekunden.
  Verwende dabei $2^4 = 16$ und $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$.

Lösungen

t = $(2^{64} - 1)\ s = (2^{60+4} - 1)\ s = 16 \cdot ((2^{10})^6 - 1)\ s \approx 16 \cdot (10^3)^6\ s = 16 \cdot 10^{18}\ s$

- Berechne die benötigte Zeit näherungsweise in Jahren.

t ≈ ***584 942 417 355 a***

- Vergleiche ihn mit anderen passenden Zeitspannen.

Alter der Erde, Alter des Universums, ...

Geschichte zum Turm von Hanoi

Vermutlich wurde das Spiel 1883 vom französischen Mathematiker Édouard Lucas erfunden. Er dachte sich dazu die Geschichte aus, dass indische Mönche im großen Tempel zu Benares, im Mittelpunkt der Welt, einen Turm aus 64 goldenen Scheiben versetzen müssten, und wenn ihnen das gelungen sei, wäre das Ende der Welt gekommen. In der Geschichte lösen die Mönche das Problem folgendermaßen: Der älteste Mönch erhält die Aufgabe, den Turm aus 64 Scheiben zu versetzen. Da er die komplexe Aufgabe nicht bewältigen kann, gibt er dem zweitältesten Mönch die Aufgabe, die oberen 63 Scheiben auf einen Hilfsplatz zu versetzen. Er selbst (der Älteste) würde dann die große letzte Scheibe zum Ziel bringen. Dann könnte der Zweitälteste wieder die 63 Scheiben vom Hilfsplatz zum Ziel bringen. Der zweitälteste Mönch fühlt sich der Aufgabe ebenfalls nicht gewachsen. So gibt er dem drittältesten Mönch den Auftrag, die oberen 62 Scheiben zu transportieren, und zwar auf den endgültigen Platz. Er selbst (der Zweitälteste) würde dann die zweitletzte Scheibe an den Hilfsplatz bringen. Schließlich würde er wieder den Drittältesten beauftragen, die 62 Scheiben vom Zielplatz zum Hilfsplatz zu schaffen. Dies setzt sich bis zum 64. Mönch (dem Jüngsten) fort, der die obenauf liegende kleinste Scheibe alleine verschieben kann. Da es 64 Mönche im Kloster gibt und alle viel Zeit haben, können sie die Aufgabe in endlicher, wenn auch sehr langer Zeit erledigen.

(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Türme_von_Hanoi)

Hinweis:

Annahme: Für einen Zug benötigt der Mönch eine Sekunde. Wie lange bräuchte er mindestens, bis er einen Turm mit 64 Scheiben umgeordnet hat?

$(2^{64} - 1)\ s \approx 584\,942\,417\,355\ a$

Das Universum ist ca. 13,75 Mrd. Jahre und die Erde ca. 4,55 Mrd. Jahre alt.

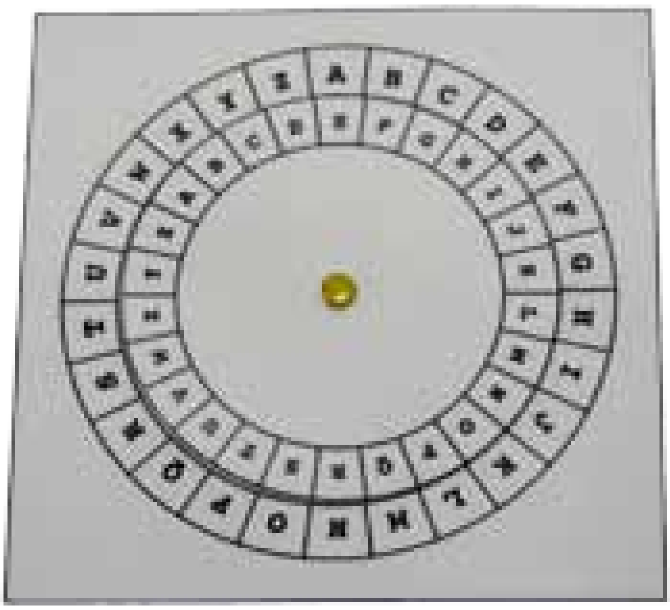
Geheime Botschaften

3

Material

- Kopiervorlage
- Klammer

Geheime Botschaften (Die Cäsar-Scheibe)



Das Experiment

Funktionsweise:

Der Originaltext besteht aus den Buchstaben auf der großen Scheibe. Die kleine Scheibe wird für den Geheimtext benötigt.

- Denke dir einen Schlüsselbuchstaben aus. Drehe die kleine Scheibe so, dass dieser unter dem „A" der großen Scheibe steht (z.B der Buchstabe „E" im obigen Bild).

- Das Originalwort „GEHEIM" wird nun folgendermaßen verschlüsselt:

Originalwort	G	E	H	E	I	M
Transport ins Feld	K			I		Q

- Verschlüssele die restlichen Buchstaben.

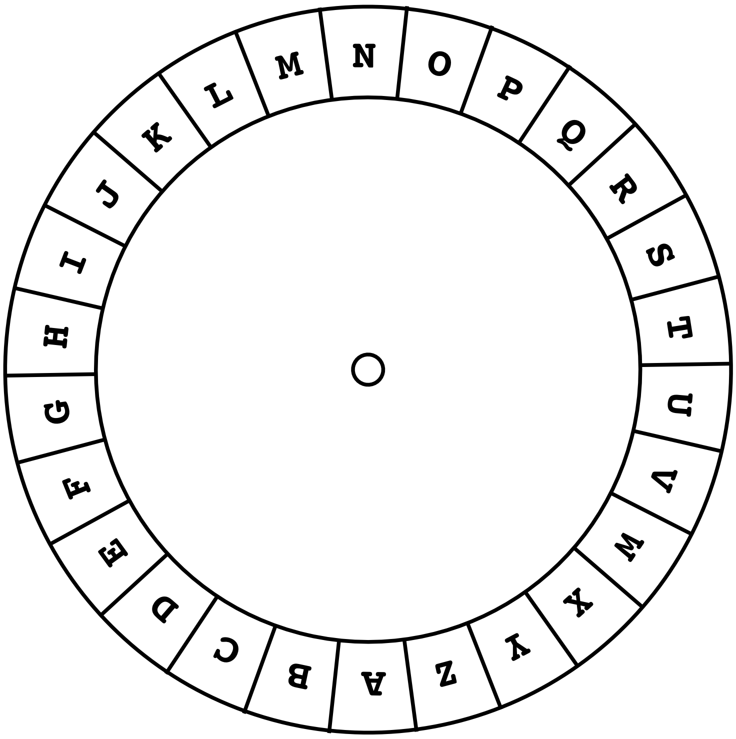
Zum Entschlüsseln musst du dem Empfänger den Geheimtext und auch den Schlüsselbuchstaben mitteilen. Die Zuordnung der Buchstaben erfolgt nun von der kleinen zur großen Scheibe.

- Entschlüssele folgenden Satz mit dem Schlüsselbuchstaben D:

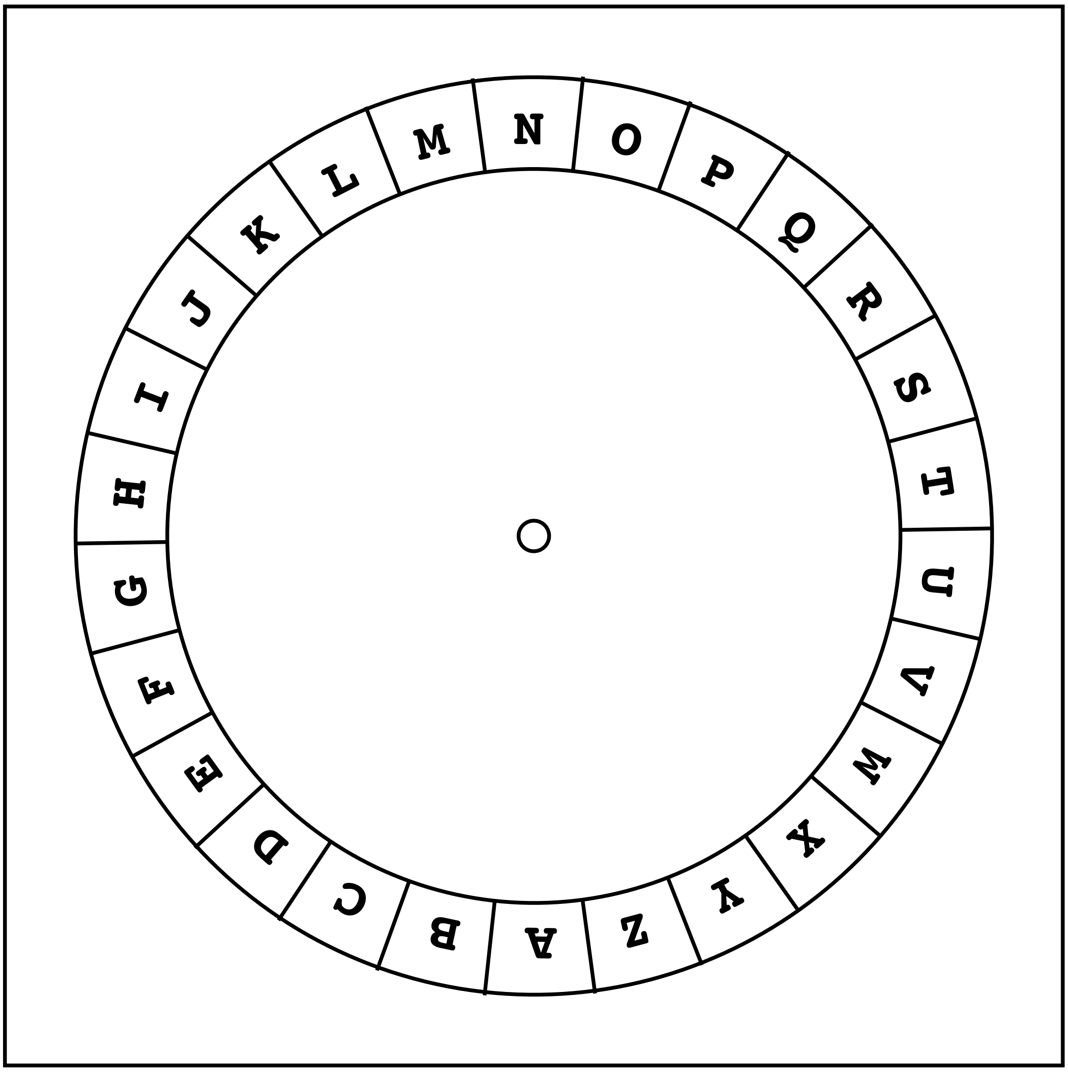
GDV JHOG LVW LQ GHU GRVH

- Schreibe dir eine Geheimbotschaft auf und verschlüssele diese.

Kopiervorlage



- Kopiervorlage laminieren
- Kreis und Quadrat ausschneiden
- In die Mitte jeweils ein Loch schneiden
- Beide Teile mit einer Klammer verbinden



Didaktische Hinweise

Der im Arbeitsblatt enthaltene Satz kann auch mit Hilfe des Computers innerhalb kürzester Zeit entschlüsselt werden, denn die dargestellte Cäsarscheibe lässt nur 25 verschiedene Möglichkeiten zu. Das ist der Grund, weshalb heutzutage geheimzuhaltende Informationen nicht mehr auf diese Weise verschlüsselt werden.

Geheimtext:

```
GDV JHOG LVW LQ GHU GRVH
```

Der Computer gibt dazu folgende Möglichkeiten aus:

```
HEW KIPH MWX MR HIV HSWI
IFX LJQI NXY NS IJW ITXJ
JGY MKRJ OYZ OT JKX JUYK
KHZ NLSK PZA PU KLY KVZL
LIA OMTL QAB QV LMZ LWAM
MJB PNUM RBC RW MNA MXBN
NKC QOVN SCD SX NOB NYCO
OLD RPWO TDE TY OPC OZDP
PME SQXP UEF UZ PQD PAEQ
QNF TRYQ VFG VA QRE QBFR
ROG USZR WGH WB RSF RCGS
SPH VTAS XHI XC STG SDHT
TQI WUBT YIJ YD TUH TEIU
URJ XVCU ZJK ZE UVI UFJV
VSK YWDV AKL AF VWJ VGKW
WTL ZXEW BLM BG WXK WHLX
XUM AYFX CMN CH XYL XIMY
YVN BZGY DNO DI YZM YJNZ
ZWO CAHZ EOP EJ ZAN ZKOA
AXP DBIA FPQ FK ABO ALPB
BYQ ECJB GQR GL BCP BMQC
CZR FDKC HRS HM CDQ CNRD
DAS GELD IST IN DER DOSE
EBT HFME JTU JO EFS EPTF
FCU IGNF KUV KP FGT FQUG
```

Ergebnis: DAS GELD IST IN DER DOSE

Der im Arbeitsblatt enthaltene Satz kann auch mit Hilfe der Buchstabenhäufigkeit entschlüsselt werden. Mit Hilfe eines Textverarbeitungsprogrammes kann die Häufigkeit der einzelnen Buchstaben oder Buchstabengruppen ermittelt werden. Der Zusammenhang zwischen den jeweiligen Buchstaben und der Häufigkeit seines Auftretens kann aus entsprechenden Tabellen abgelesen werden.

Buchstabenhäufigkeit in deutschen Texten

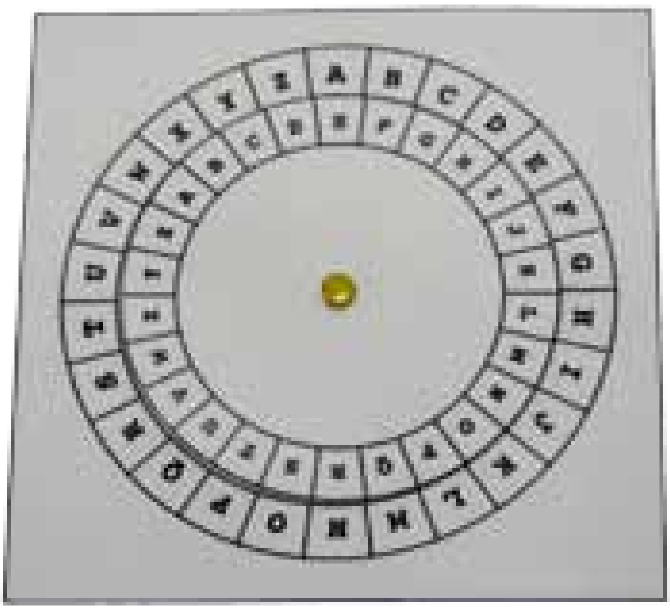
E	17,40 %
N	9,78 %
I	7,55 %
S	7,27 %
R	7,00 %
A	6,51 %
T	6,15 %
D	5,08 %
H	4,76 %
U	4,35 %
L	3,44 %
C	3,06 %
G	3,01 %
M	2,53 %
O	2,51 %
B	1,89 %
W	1,89 %
F	1,66 %
K	1,21 %
Z	1,13 %
P	0,79 %
V	0,67 %
ß	0,31 %
J	0,27 %
Y	0,04 %
X	0,03 %
Q	0,02 %

(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Buchstabenhäufigkeit)

- Bearbeiten – Suchen und Ersetzen: z.B. e durch e → Ersetze alle
  Dadurch wird angezeigt, wie oft der Buchstabe e im Text vorkommt.

Lösungen

Geheime Botschaften (Die Cäsar-Scheibe)



Das Experiment

Funktionsweise:

Der Originaltext besteht aus den Buchstaben auf der großen Scheibe. Die kleine Scheibe wird für den Geheimtext benötigt.

- Denke dir einen Schlüsselbuchstaben aus. Drehe die kleine Scheibe so, dass dieser unter dem „A“ der großen Scheibe steht (z.B der Buchstabe „E“ im obigen Bild).
- Das Originalwort „GEHEIM“ wird nun folgendermaßen verschlüsselt:

Originalwort	G	E	H	E	I	M
Transport ins Feld	K	***I***	***L***	I	***M***	Q

- Verschlüssele die restlichen Buchstaben.

Zum Entschlüsseln musst du dem Empfänger den Geheimtext und auch den Schlüsselbuchstaben mitteilen. Die Zuordnung der Buchstaben erfolgt nun von der kleinen zur großen Scheibe.

- Entschlüssele folgenden Satz mit dem Schlüsselbuchstaben D:

GDV JHOG LVW LQ GHU GRVH
DAS GELD IST IN DER DOSE

- Schreibe dir eine Geheimbotschaft auf und verschlüssele diese.

Der verflixte Würfel

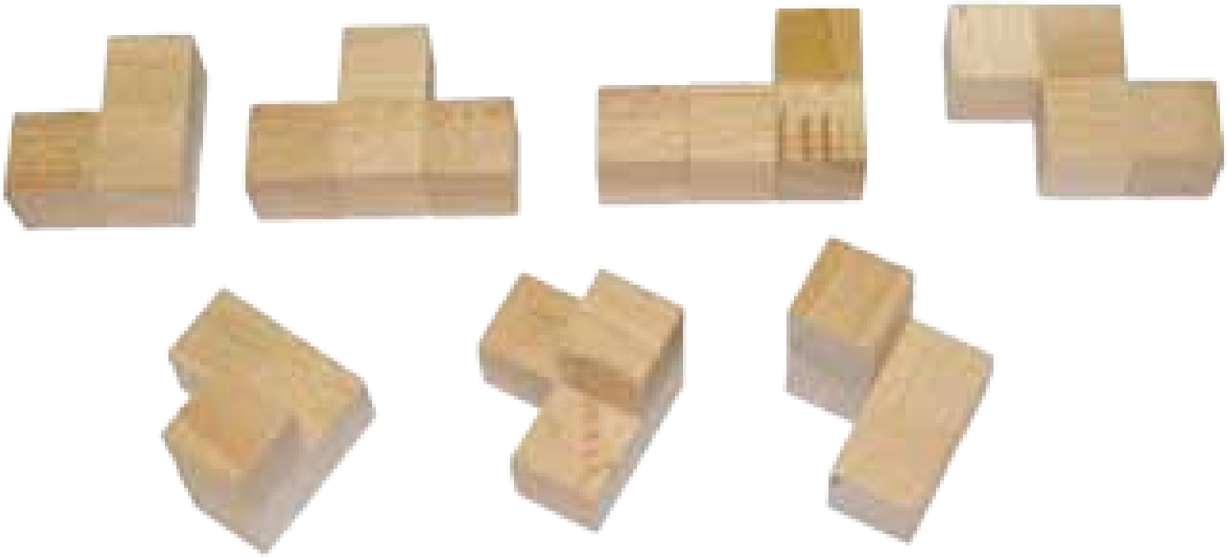
4

Material

- 27 Holzwürfel
  (in verschiedenen Körpern)

- Holzleim
  (für den erstmaligen Zusammenbau der Körper)

Der verflixte Würfel

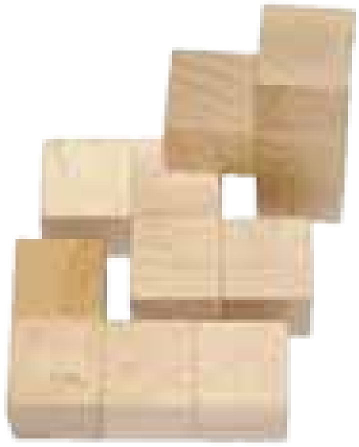


Das Experiment

▸ Ergänze die Figur zu einem Würfel.

▸ Berechne sein Volumen und seine Oberfläche.

▸ Zeichne das Schrägbild des Würfels in dein Heft.



- Beginne jetzt mit diesen Körpern und baue den Würfel nach.
- Finde eine weitere Möglichkeit den Würfel zu bauen.

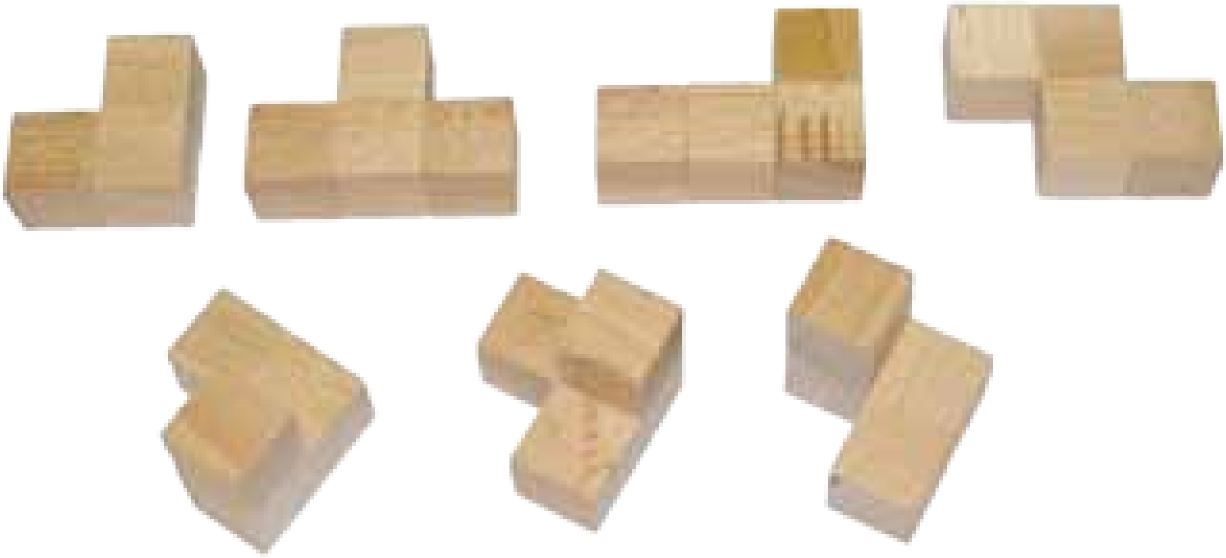
Hinweis:
Es gibt 240 verschiedene Möglichkeiten (ohne symmetrische Lösungen).

- Baue folgende Figuren („Bett" und „Tor") nach und zeichne jeweils das Schrägbild in dein Heft.

- Vergleiche jeweils das Volumen der beiden Körper mit dem des Würfels.
- Berechne jeweils die Oberfläche der beiden Körper und vergleiche deine Ergebnisse mit der Oberfläche des Würfels.

Material

Aus den 27 Holzwürfeln (je 2 cm Kantenlänge) müssen mit Holzleim die abgebildeten Körper zusammengeklebt werden.



Didaktische Hinweise:

- Die Schüler verbessern beim Bau ihr räumliches Vorstellungsvermögen, das durch die Erstellung von Schrägbildern gefestigt wird.
- Die sieben Körper bieten vielfältige Möglichkeiten zur Erstellung von Aufgaben zum Thema „Berechnung des Volumens und der Oberfläche zusammengesetzter Körper“.

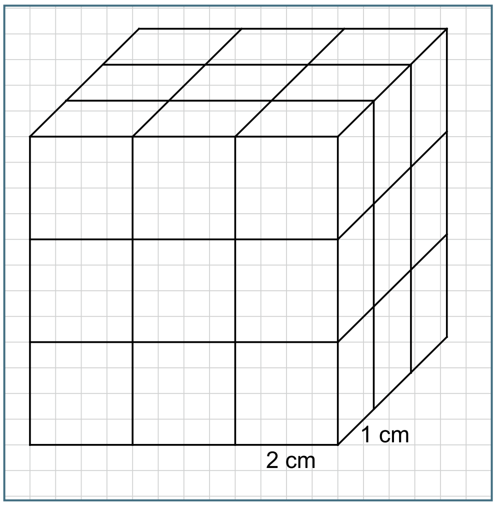
Lösungen

Der verflixte Würfel

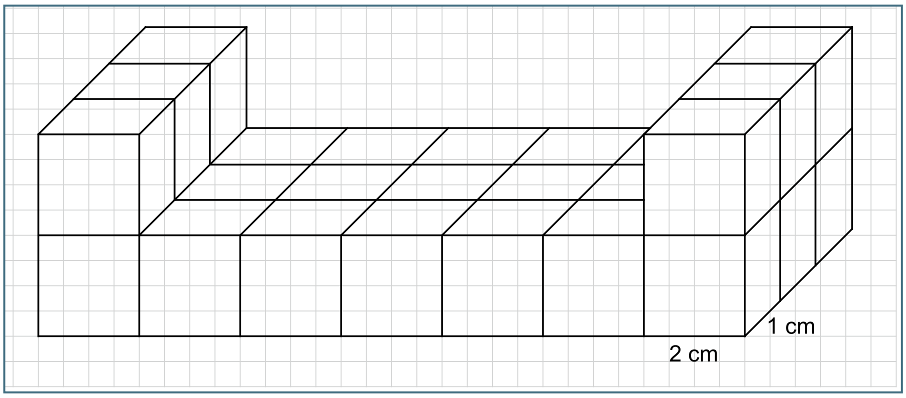
▸ Volumina und Oberflächen

	Würfel	„Tor“	„Bett“
Volumen in cm^3	216	216	216
Oberfläche in cm^2	216	248	288

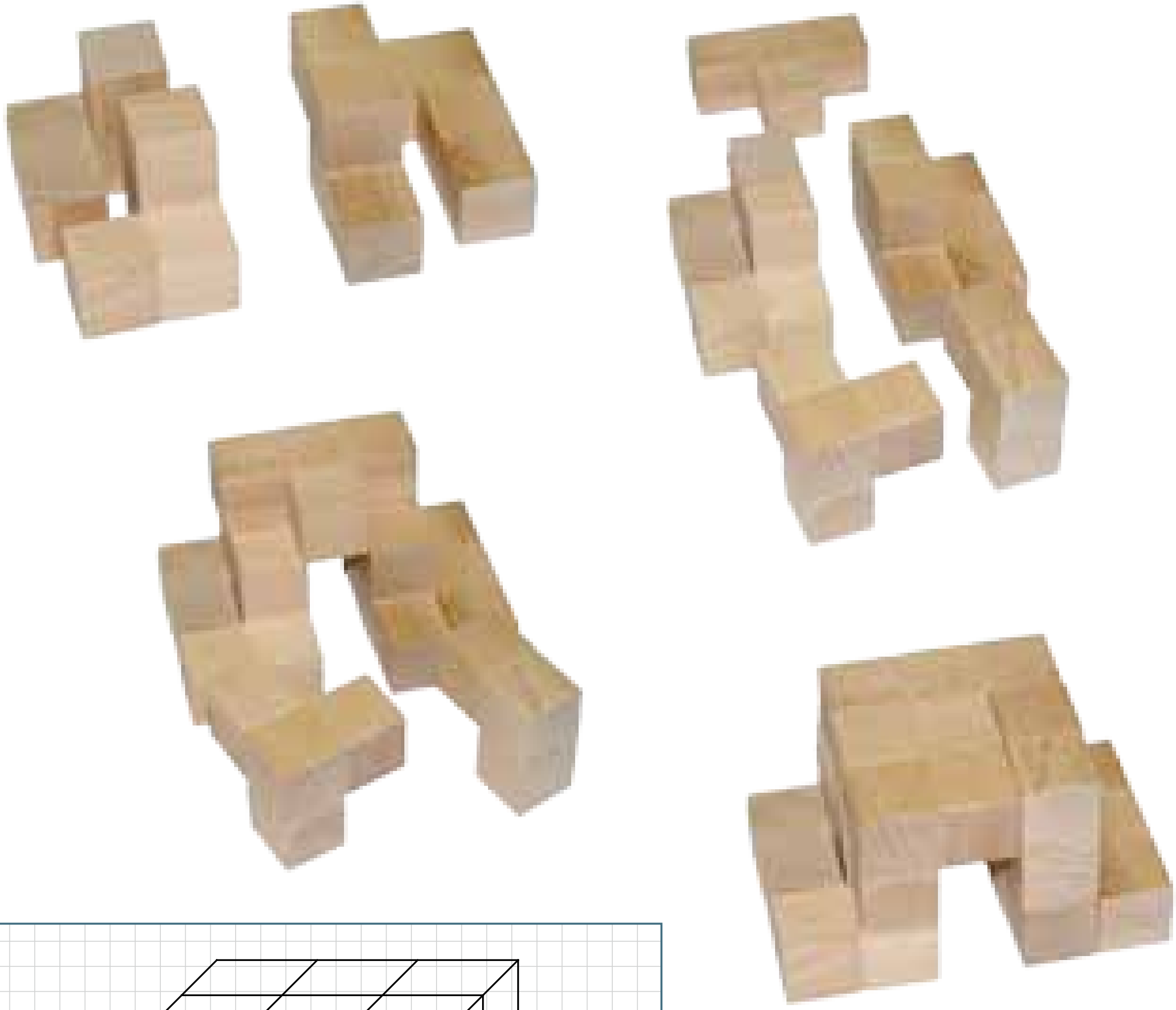
▸ Zeichne das Schrägbild des Würfels.

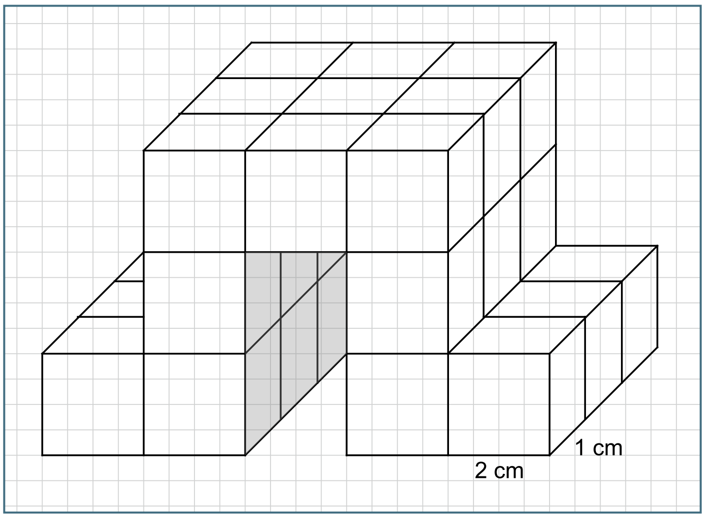


▸ Baue folgende Figuren („Bett“ und „Tor“) nach und zeichne jeweils das Schrägbild in dein Heft.



Lösungen





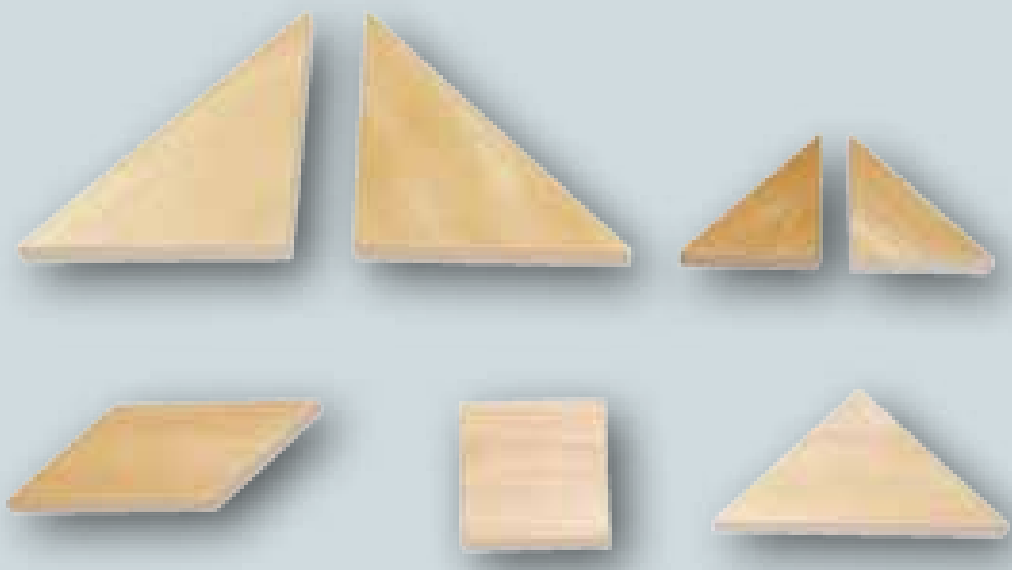
- Vergleiche jeweils das Volumen der beiden Körper mit dem des Würfels.

  (siehe Tabelle)

- Berechne jeweils die Oberfläche der beiden Körper und vergleiche deine Ergebnisse mit der Oberfläche des Würfels.

  (siehe Tabelle)

Tangram

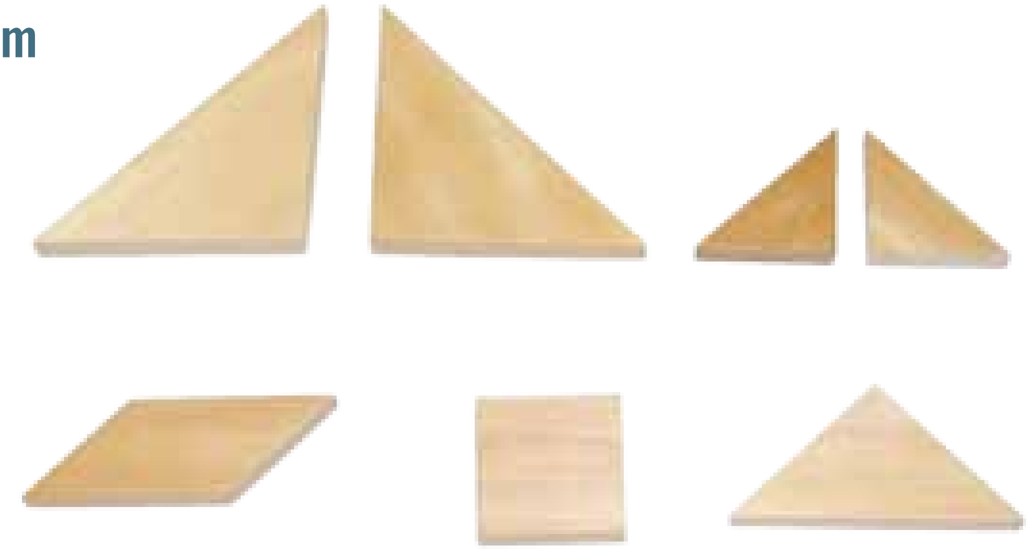


5

Material

- Tangram-Steine
  - Zwei Vierecke
  - Fünf Dreiecke

Tangram



Das Experiment

- Wie viele verschiedene große gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gibt es?

____

Skizziere bei den folgenden Aufgaben jeweils deine Lösung in dein Heft.

- Lege mit drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken ein Quadrat.
- Lege mit drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken ein Rechteck, das kein Quadrat ist.
- Lege zwei gleiche Steine so dazu, dass ein noch größeres Rechteck entsteht.
- Füge sechs Teile zu einem großen Rechteck zusammen.
- Lege aus allen Teilen ein Quadrat.
- Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und einem weiteren Teil ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.
- Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat ein Parallelogramm.

- Welchen Flächeninhalt besitzt das Parallelogramm, wenn das kleine Quadrat 12,25 cm² groß ist?

  Flächeninhalt des Parallelogramms: __________

- Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat ein achsensymmetrisches Trapez.

- Lege verschiedene Trapeze, in denen jeweils nur zwei benachbarte Innenwinkel das Maß 90° besitzen.

Material

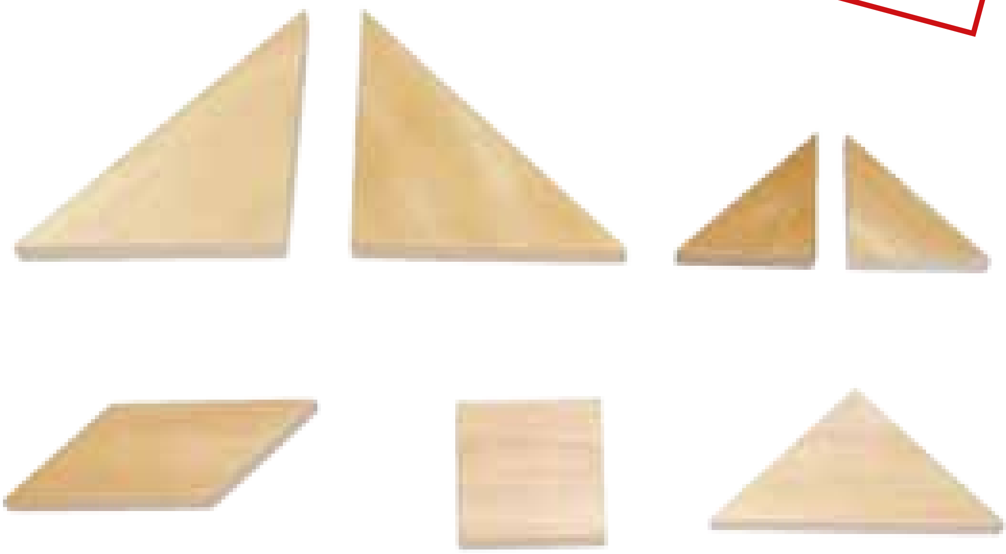
- Zwei Vierecke
- Fünf Dreiecke

Didaktische Hinweise

- Die sieben Teile bieten vielfältige Möglichkeiten zur Erstellung von Aufgaben zu den Themen „Zerlegungsgleichheit von Figuren“ sowie „Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren“.
- Die Flächeninhalte der vorliegenden Figuren (Dreiecke, Quadrat, Parallelogramm) können ohne Berechnung mit Hilfe von Flächenformeln als Vielfache des Flächeninhalts des kleinsten Dreiecks bestimmt werden.

Lösungen

Tangram



Das Experiment

▸ Wie viele verschieden große gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gibt es?

3

Skizziere bei den folgenden Aufgaben jeweils deine Lösung in dein Heft.

▸ Lege mit drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken ein Quadrat.

▸ Lege mit drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken ein Rechteck, das kein Quadrat ist.

▸ Lege zwei gleiche Steine so dazu, dass ein noch größeres Rechteck entsteht.

Lösungen

▸ Füge sechs Teile zu einem großen Rechteck zusammen.

▸ Lege aus allen Teilen ein Quadrat.

▸ Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und einem weiteren Teil ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

Lösungen

- Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat ein Parallelogramm.

- Welchen Flächeninhalt besitzt das Parallelogramm, wenn das kleine Quadrat 12,25 cm² groß ist?

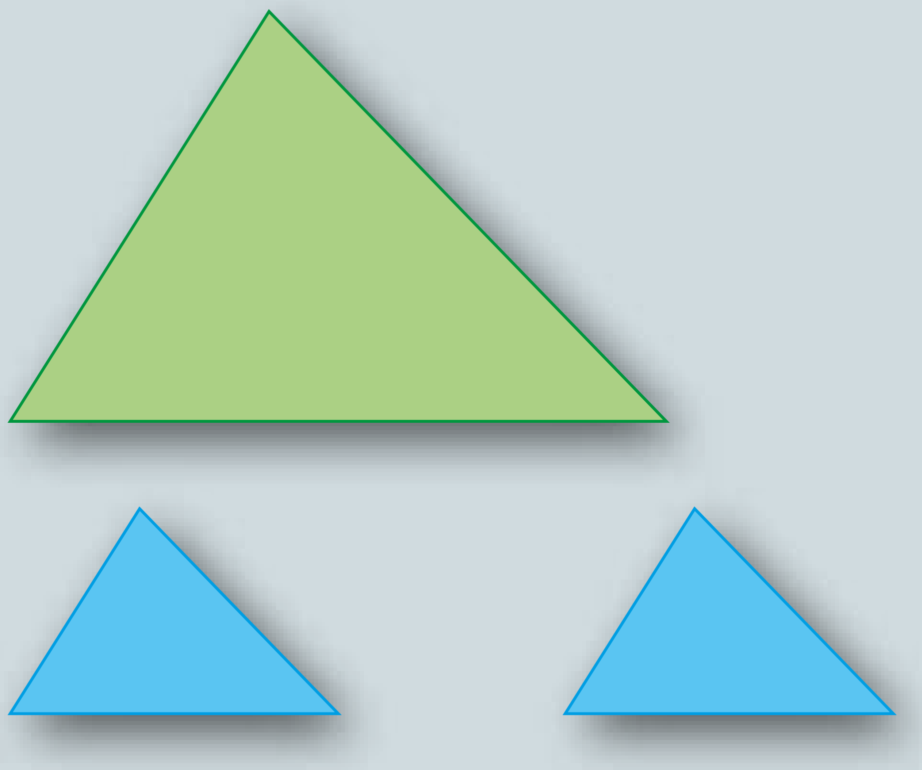
  Flächeninhalt des Parallelogramms: ***24,50 cm²***

- Lege mit den zwei kleinsten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat ein achsensymmetrisches Trapez.

Lösungen

- Lege verschiedene Trapeze, in denen jeweils nur zwei benachbarte Innenwinkel das Maß 90° besitzen.

Vergrößern und Verkleinern

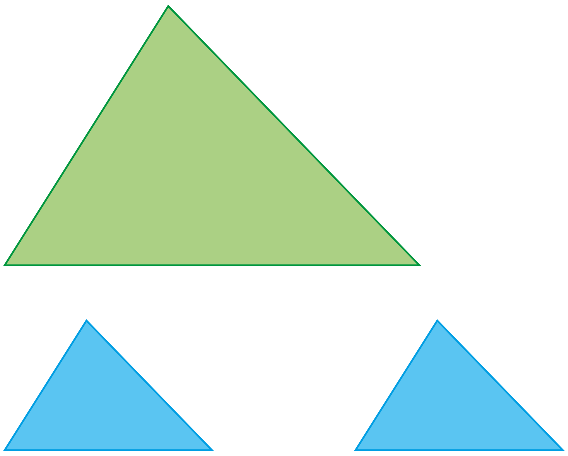


6

Material

- Kopiervorlage

Vergrößern und Verkleinern



Das Experiment

Die beiden kleinen Dreiecke sind deckungsgleich. Beim großen Dreieck sind die entsprechenden Seiten doppelt so lang wie bei den kleinen Dreiecken.

▶ Wie viele von den kleinen Dreiecken benötigst du, um damit das große Dreieck lückenlos zu bedecken?

Anzahl: ______

▶ Zeichne die Lösung in die obige Abbildung ein.

▶ Notiere das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{blau} : A_{groß}$ = _____ : _____

▶ Ergänze: Verdoppelt man die Seitenlängen eines Dreiecks, so wird der

Flächeninhalt des vergrößerten Dreiecks __________________________ .

▶ Lege ein blaues Dreieck bündig in eine beliebige Ecke des grünen.
Die nicht verdeckte grüne Restfläche stellt ein besonderes Viereck dar.

▶ Gib den Vierecksnamen an: ____________________

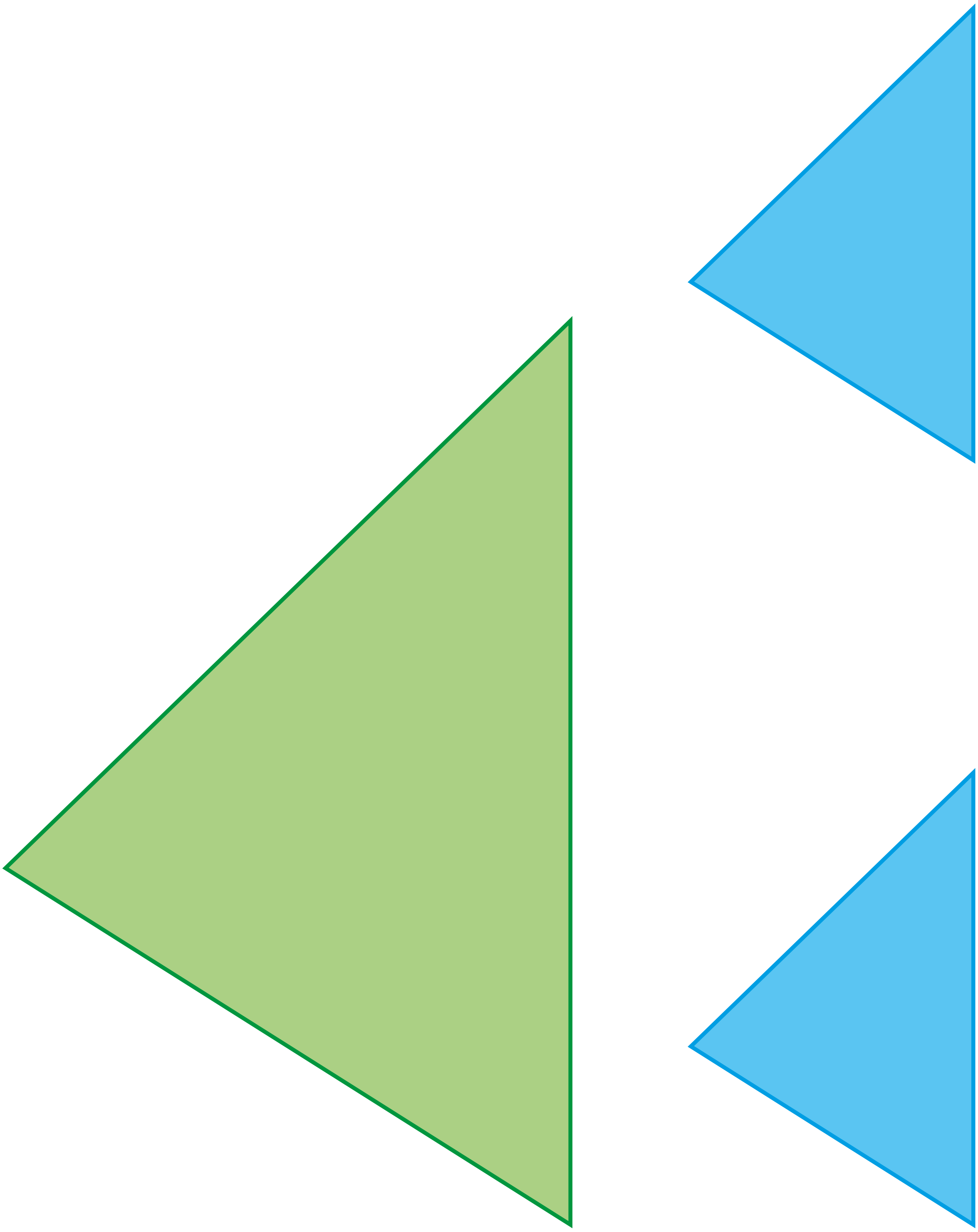
▶ Notiere wieder das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{blau} : A_{grün}$ = _____ : _____

▶ Lege zwei blaue Dreiecke bündig in verschiedene Ecken des grünen. Die nicht verdeckte grüne Restfläche stellt ein besonderes Viereck dar.

▶ Gib den Vierecksnamen an: ____________________

▶ Notiere wieder das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{blau} : A_{grün}$ = _____ : _____

Kopiervorlage



Material

- Die Kopiervorlage laminieren und die drei Dreiecke ausschneiden.

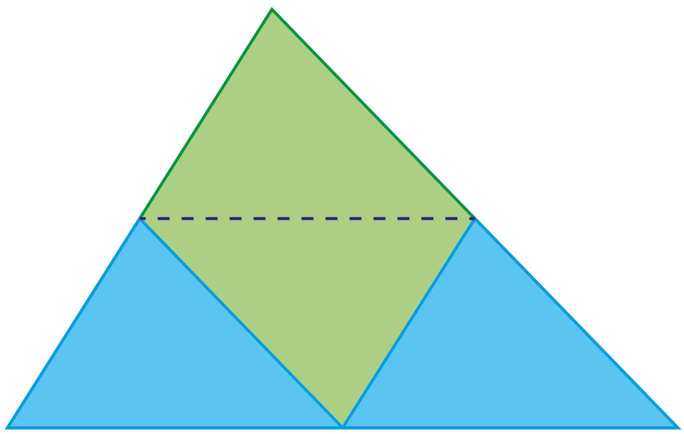
Didaktische Hinweise

- „Kongruent“ bedeutet „deckungsgleich“: Legt man die blauen Dreiecke bündig aufeinander, so „kommen sie zur Deckung“.

- Jedes der blauen Dreiecke lässt sich in jeder der drei Ecken des grünen Dreiecks unterbringen. Das bedeutet, dass alle Dreiecke paarweise in ihren Innenwinkelmaßen übereinstimmen. Das grüne ist zu jedem der blauen Dreiecke ähnlich.

- Eine Seite des grünen Dreiecks ist doppelt so lang wie die entsprechende Seite eines blauen Dreiecks.

- Im grünen Dreieck sind neben den zwei blauen noch zwei weitere zu diesen kongruente gedanklich zu ergänzen. Ein Beispiel (von drei Möglichkeiten):



  Die Eigenschaften des Parallelogramms können aus denjenigen der Punktspiegelung oder auch der Parallelverschiebung ermittelt werden.

- Mit dem Experiment wird der Zusammenhang $A' = k^2 \cdot A$ zwischen den Flächeninhalten A und A‘ von Ur- und Bilddreieck aufgezeigt. Die Frage, warum nicht $A' = 2k \cdot A$ gilt, ist noch zu klären.

Lösungen

Vergrößern und Verkleinern

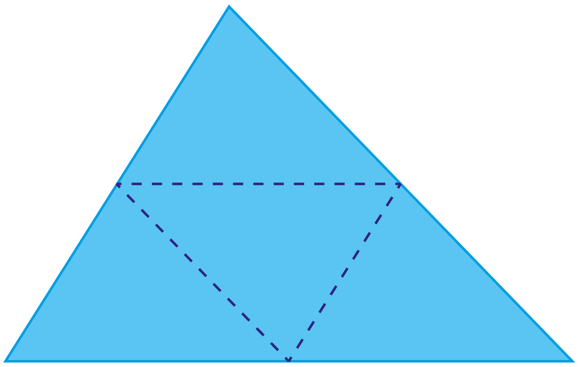
Das Experiment

Die beiden kleinen Dreiecke sind deckungsgleich. Beim großen Dreieck sind die entsprechenden Seiten doppelt so lang wie bei den kleinen Dreiecken.

- Wie viele von den kleinen Dreiecken benötigst du, um damit das große Dreieck lückenlos zu bedecken?

  Anzahl: ***4***

- Zeichne die Lösung oben ein.



- Notiere das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{\text{blau}} : A_{\text{groß}} =$ ***1*** : ***4***

- Ergänze: Verdoppelt man die Seitenlängen eines Dreiecks, so wird der

  Flächeninhalt des vergrößerten Dreiecks ***vervierfacht*** .

- Lege ein blaues Dreieck bündig in eine beliebige Ecke des grünen.
  Die nicht verdeckte grüne Restfläche stellt ein besonderes Viereck dar.

- Gib den Vierecksnamen an: ***Es ist ein Trapez.***

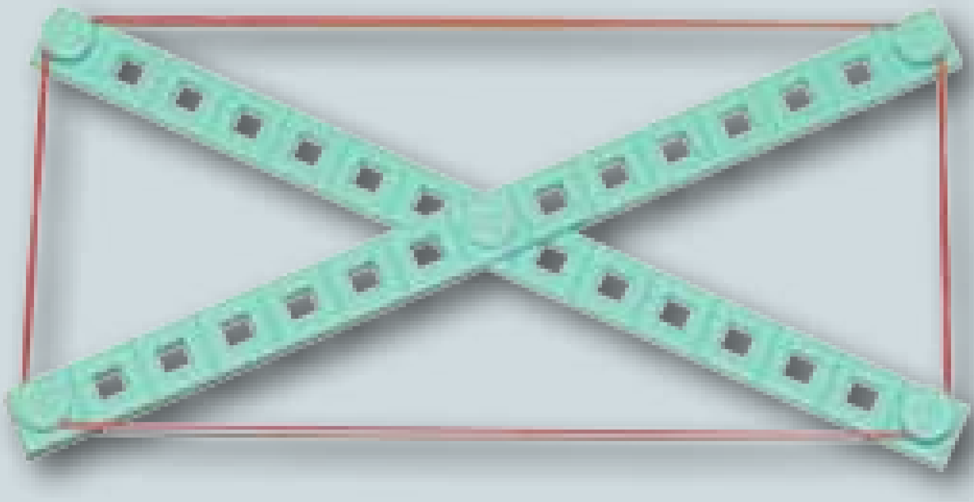
- Notiere wieder das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{\text{blau}} : A_{\text{grün}} =$ ***1*** : ***3***

- Lege zwei blaue Dreiecke bündig in verschiedene Ecken des grünen. Die nicht verdeckte grüne Restfläche stellt ein besonderes Viereck dar.

- Gib den Vierecksnamen an: ***Es ist ein Prallelogramm.***

- Notiere wieder das Verhältnis der Flächeninhalte: $A_{\text{blau}} : A_{\text{grün}} =$ ***1*** : ***2***

Gummivierecke



7

Material

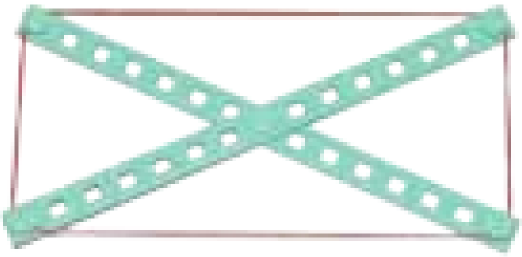
Für jeden der fünf Viereckstypen:

- 2 Lochstreifen
- 5 Clips
- 1 Gummiring

Gummivierecke

Experimente

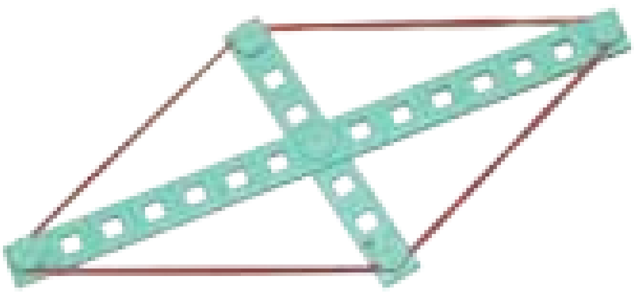
Mit diesem Gummiviereck kannst du verschiedene besondere Vierecke einstellen.



- Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.
- Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

	Eigenschaften	
	Die Seiten müssen gleich lang sein.	
	Die Diagonalen sind gleich lang.	
	Die Diagonalen halbieren sich.	
	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	

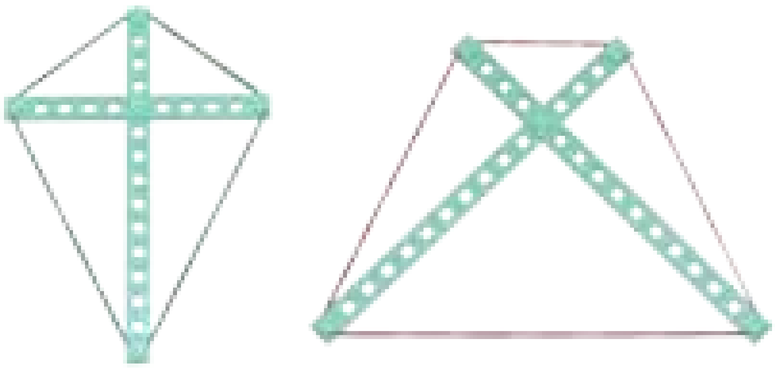
Mit diesem Gummiviereck kannst du verschiedene besondere Vierecke einstellen.



- Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.
- Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

	Eigenschaften	
	Die Seiten müssen gleich lang sein.	
	Die Diagonalen halbieren sich.	
	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	

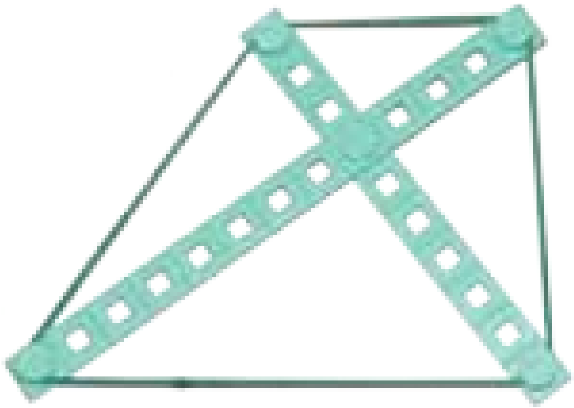
Mit diesen Gummivierecken kannst du jeweils nur ein besonderes Viereck einstellen.



- Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.
- Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

	Eigenschaften	
	Es gibt parallele Seiten.	
	Die Diagonalen halbieren sich.	
	Nur eine Diagonale wird halbiert.	
	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	
	Das Viereck ist achsensymmetrisch.	

Mit diesem Gummiviereck kannst du einen besonderen Viereckstyp einstellen.



- Notiere den Vierecksnamen in das grau gekennzeichnete Feld.
- Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

Eigenschaften	
Es gibt parallele Seiten.	
Die Diagonalen halbieren sich.	
Nur eine Diagonale wird halbiert.	
Entsprechende Diagonalenabschnitte stehen im gleichen Verhältnis.	
Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	
Das Viereck ist achsensymmetrisch.	

Material

- Für die Vierecke werden jeweils 2 Lochstreifen, 5 Clips und 1 Gummiring benötigt.

Vieleckstyp	**Anzahl der Löcher (je 1 cm)**	**Farbe des Gummirings**
Rechteck, Quadrat	2 x 15	rot
Parallelogramm, Raute	1 x 15 und 1 x 7	rot
Drachen	1 x 15 und 1 x 11	grün
achsensymmetrisches Trapez	2 x 16	rot
nicht symmetrisches Trapez	1 x 13 und 1 x 10	grün

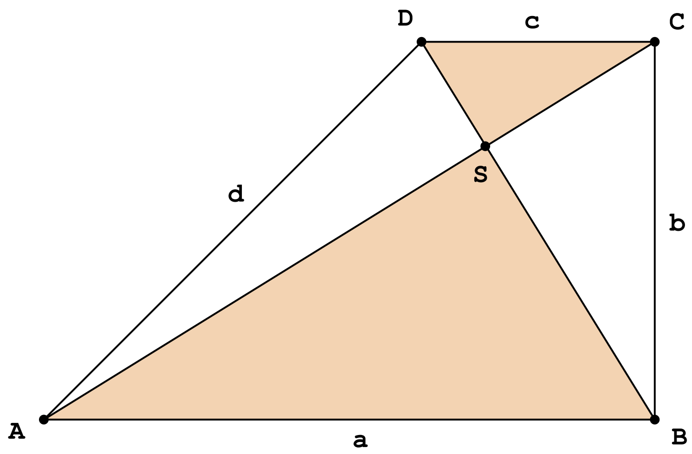
Didaktische Hinweise

- Neben der üblichen Vorgehensweise, die Eigenschaften von besonderen Vierecken (z.B. Rechtecken, Rauten usw.) mit Hilfe der Seiten- und Winkelbeziehungen zu erarbeiten, werden mit den Gummivierecken die Eigenschaften über die Diagonalen- und deren Winkelbeziehungen erschlossen.

- Jedes Quadrat besitzt neben allen Eigenschaften des Rechtecks weitere, die das Rechteck nicht besitzt, d.h. jedes Quadrat darf sich Rechteck nennen - die Umkehrung gilt aber nicht.

- Jede Raute besitzt neben allen Eigenschaften des Parallelogramms weitere, die das Parallelogramm nicht besitzt, d.h. jede Raute darf sich Parallelogramm nennen – die Umkehrung gilt aber nicht.

Hinweise zum zuletzt abgebildeten Trapez



- Die Dreiecke ABS und DSC sind wegen der parallelen Seiten zueinander ähnlich.

  Dann gilt z.B.: $\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = k$

- Die entsprechenden Diagonalenabschnitte stehen also im gleichen Verhältnis.

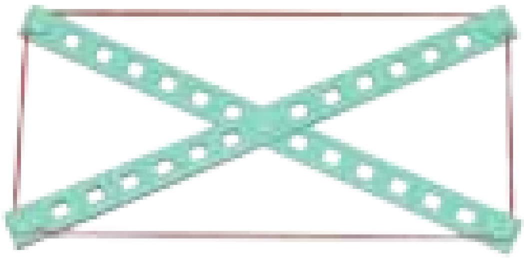
  Weiter gilt für die Flächeninhalte: $\frac{A_{SCD}}{A_{SAB}} = k^2$

Lösungen

Gummivierecke

Experimente

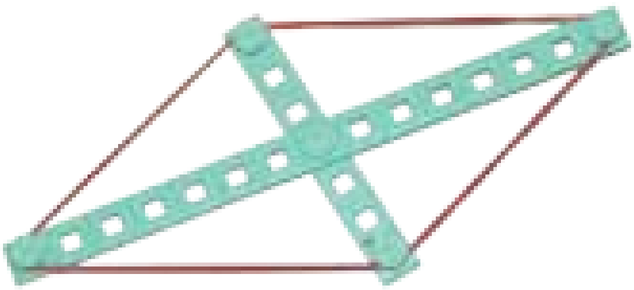
Mit diesem Gummiviereck kannst du verschiedene besondere Vierecke einstellen.



- Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.
- Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

Rechteck	**Eigenschaften**	*Quadrat*
	Die Seiten müssen gleich lang sein.	*X*
X	Die Diagonalen sind gleich lang.	*X*
X	Die Diagonalen halbieren sich.	*X*
	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	*X*
X	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	

Mit diesem Gummiviereck kannst du verschiedene besondere Vierecke einstellen.



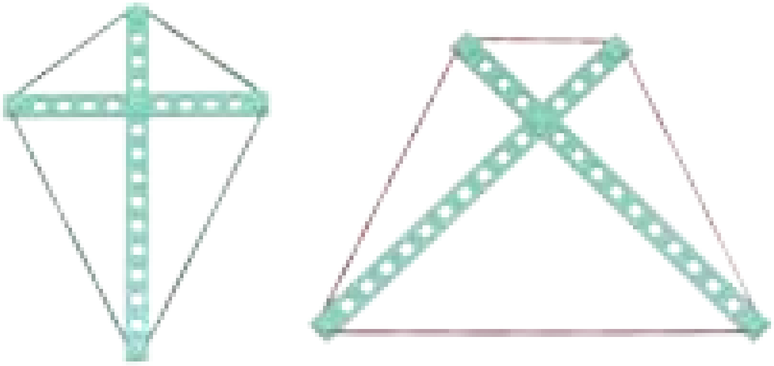
Lösungen

▸ Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.

▸ Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

Parallelogramm	**Eigenschaften**	*Raute*
	Die Seiten müssen gleich lang sein.	X
X	Die Diagonalen halbieren sich.	X
	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	X
X	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	

Mit diesen Gummivierecken kannst du jeweils nur ein besonderes Viereck einstellen.



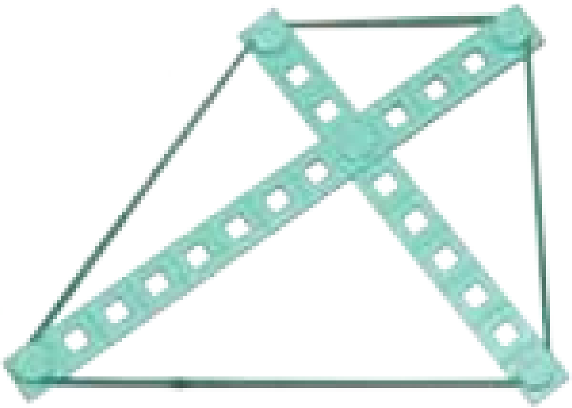
▸ Notiere jeweils den Vierecksnamen in die grau gekennzeichneten Felder.

▸ Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

Drachenviereck	**Eigenschaften**	*Trapez*
	Es gibt parallele Seiten.	X
	Die Diagonalen halbieren sich.	
X	Nur eine Diagonale wird halbiert.	
X	Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
	Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	X
X	Das Viereck ist achsensymmetrisch.	X

Lösungen

Mit diesem Gummiviereck kannst du einen besonderen Viereckstyp einstellen.

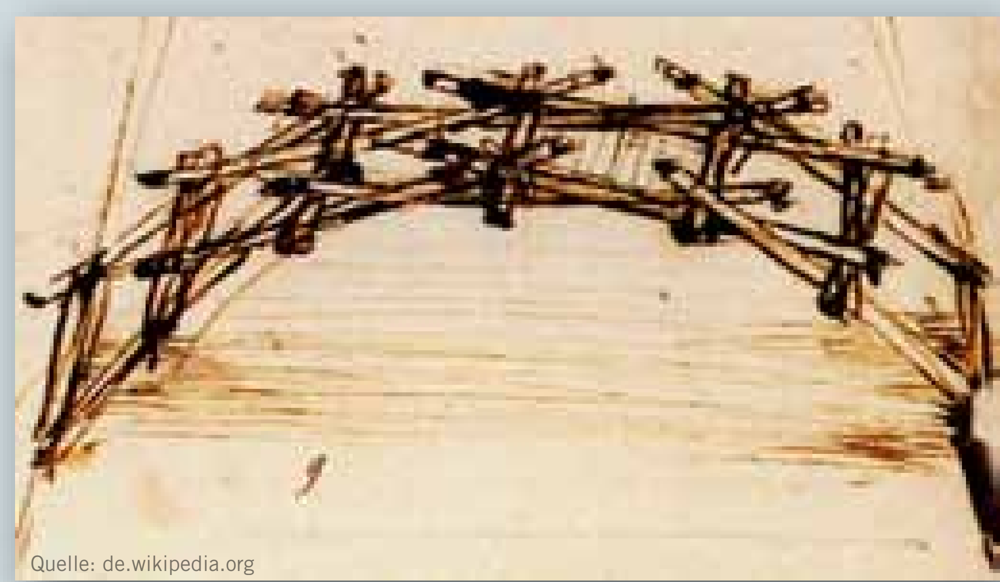


▸ Notiere den Vierecksnamen in das grau gekennzeichnete Feld.

▸ Kreuze die jeweils zutreffenden Eigenschaften an.

Eigenschaften	*Trapez*
Es gibt parallele Seiten.	*X*
Die Diagonalen halbieren sich.	
Nur eine Diagonale wird halbiert.	
Entsprechende Diagonalenabschnitte stehen im gleichen Verhältnis.	*X*
Die Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.	
Die Diagonalen können aufeinander senkrecht stehen.	*X*
Das Viereck ist achsensymmetrisch.	

Leonardos Brücke hält



Quelle: de.wikipedia.org

8

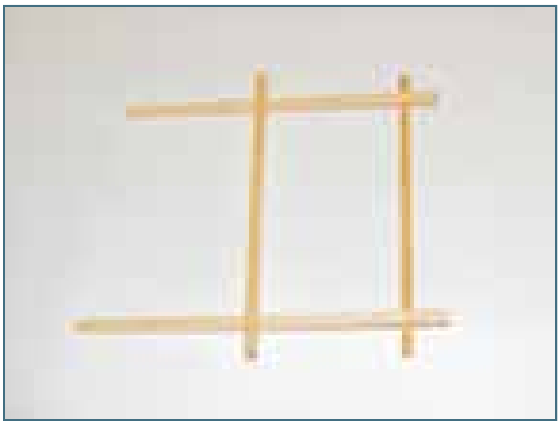
Material

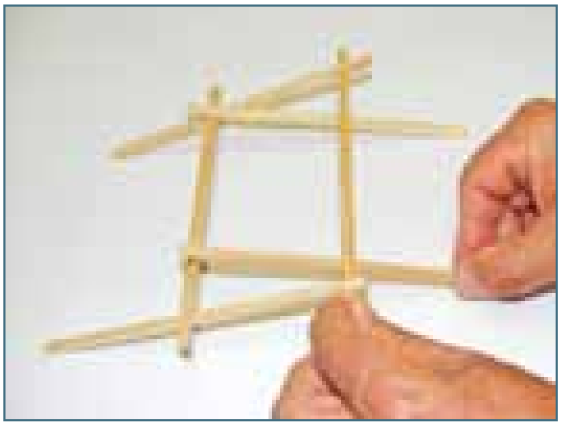
- 12 Holzstäbe (ca. 16 cm lang, rau)

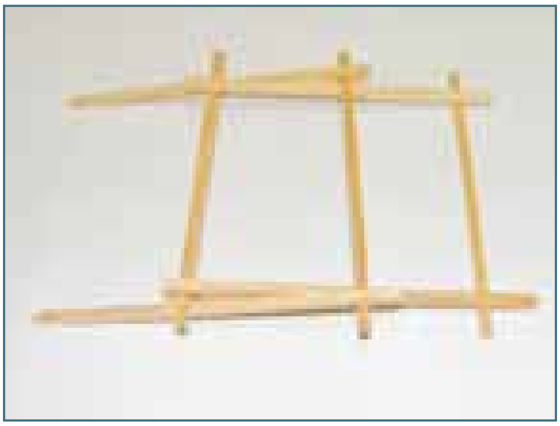
Leonardos Brücke hält

Das Experiment

▸ Baue die Leonardo-Brücke anhand der Fotos nach.







Aufgaben

Durch Anfügen von jeweils 3 Holzstäben könnte die Brücke beliebig verlängert werden.

- Stelle die Anzahl aller Holzstäbe, die für den Bau einer Brücke mit beliebiger Länge erforderlich sind, als Term dar. Begründe deine Lösung.

- Aus 999 (668) Holzstäben soll eine möglichst lange Brücke gebaut werden. Bleiben Holzstäbe übrig? Wenn ja, wie viele?

Lösungen

Leonardos Brücke hält

Aufgaben

Durch Anfügen von jeweils 3 Holzstäben könnte die Brücke beliebig verlängert werden.

- Stelle die Anzahl aller Holzstäbe, die für den Bau einer Brücke mit beliebiger Länge erforderlich sind, als Term dar. Begründe deine Lösung.

Zum Bau der ursprünglichen Brücke, so wie sie eingangs dargestellt ist, werden 12 Stäbe benötigt.
Zur stabilen Verlängerung der Brücke um jeweils ein Element kommen jeweils drei Stäbe dazu.
Für die Anzahl aller Holzstäbe ergibt sich also Term $12 + 3n$ oder $3(4 + n)$, wobei die natürliche Zahl n die Anzahl der zusätzlichen Elemente aus jeweils drei Stäben darstellt.
Der Term $T(n)=3(4+n)$ ist stets durch 3 teilbar.

- Aus 999 (668) Holzstäben soll eine möglichst lange Brücke gebaut werden. Bleiben Holzstäbe übrig? Wenn ja, wie viele?

Also bleibt kein Stab übrig, wenn die Gesamtzahl der Stäbe durch 3 teilbar ist (Test durch die Quersumme), das ist bei 999 Stäben der Fall.
Natürlich führen auch die Ansätze $3(4 + n) = 999$ bzw. $12 + 3n = 999$ zum Ziel.
Stehen dagegen 668 Stäbe zur Verfügung, ist deren Anzahl nicht durch 3 teilbar. Das wäre schon für 666 Stäbe der Fall. Somit bleiben jetzt zwei Stäbe übrig.
Die Alternative mit dem Ansatz $3(4 + n) = 668$ ist etwas umständlicher als die mit dem Ansatz $12 + 3n = 668$.

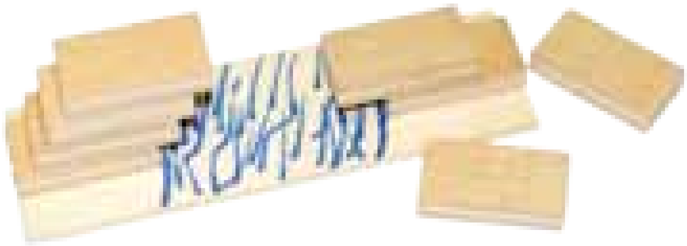
Die Brücke über den Main

9

Material

- 8 Holzklötze 4 cm x 2 cm
- 1 Bodenplatte ca. 5 cm x 15 cm
- Holzleim
  (zur erstmaligen Befestigung der beiden Sockelbausteine)

Die Brücke über den Main



Das Experiment

- Die quaderförmigen Bausteine sollen symmetrisch so aufgeschichtet werden, dass sie eine Brücke mit möglichst großer Spannweite bilden.
- Stelle zunächst nur auf der rechten Seite alle 4 Bausteine bündig aufeinander.
- Schiebe dann den obersten Baustein so weit wie möglich nach links, ohne dass er kippt.
- Schiebe dann den darunterliegenden Baustein wieder so weit wie möglich nach links.
- Wiederhole das Experiment auch mit dem dritten Stein, auf dem jetzt die zwei schon verschobenen Steine liegen.
- Verfahre jetzt genauso mit den Quadersteinen auf der linken Seite.
  Wenn die Steine gut genug angeordnet sind, berühren sich die obersten Quader.
- Zeichne die Lösung im Querschnitt im Maßstab 1:1.

Material

- 8 Holzklötze 4 cm x 2 cm, 1 Bodenplatte ca. 5 cm x 15 cm, Holzleim
- Klebe 2 Holzquader im Abstand von 6,6 cm auf die Bodenplatte.

Didaktische Hinweise

- Da sich die kleinen Quader bei diesem Experiment nur schwerlich bis an ihre jeweilige ideale Grenze heranschieben lassen, ist eine Demonstration z.B. mit dicken Brettern oder Balken unerlässlich.
- Das Thema greift zunächst physikalische Sachverhalte auf, die jedoch intuitiv von den Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden können.

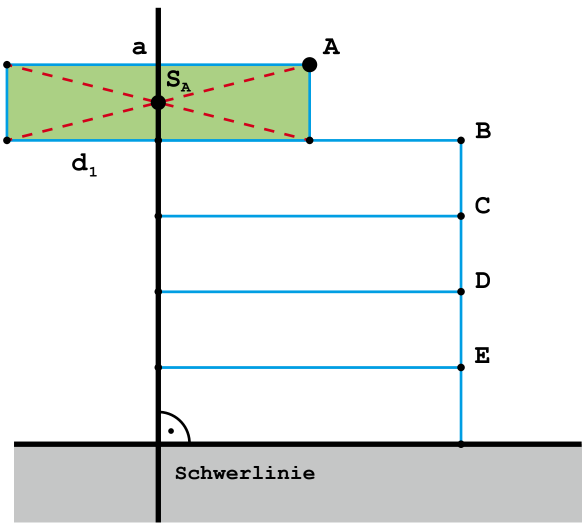
Unter welchen Bedingungen kippt ein fester Körper um?

- Zur Klärung dieses Sachverhalts experimentieren die Schüler/innen zusammen mit der Lehrkraft z.B. an einem Standfestigkeitsapparat aus der Physiksammlung. Die Schüler/innen sollen danach wissen, was die Begriffe „Standfläche", „Schwerpunkt" und „Schwerlinie" bedeuten.

Zusammenfassend ergibt sich:

- Ein Körper kippt, wenn die Schwerlinie, die durch seinen Schwerpunkt verläuft, die Standfläche verlässt.

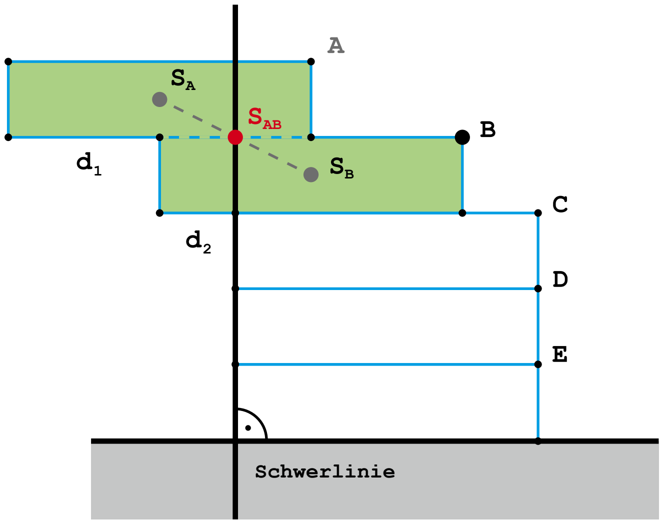
Wir verschieben auf dem Stapel nur den obersten Quader



- Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt S_A des Quaders A mit der Länge a wie der aller anderen Quader von der Seite betrachtet im Diagonalenschnittpunkt des zugehörigen Rechtecks liegen.

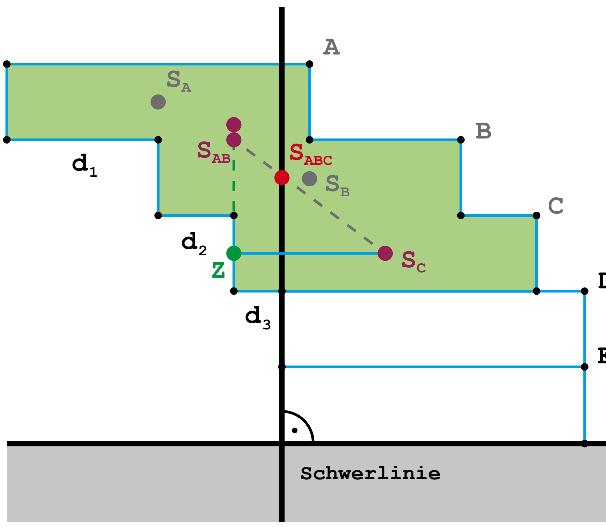
- Daher beträgt der maximal zulässige Überhang $d_1 = \frac{1}{2} \cdot a$.

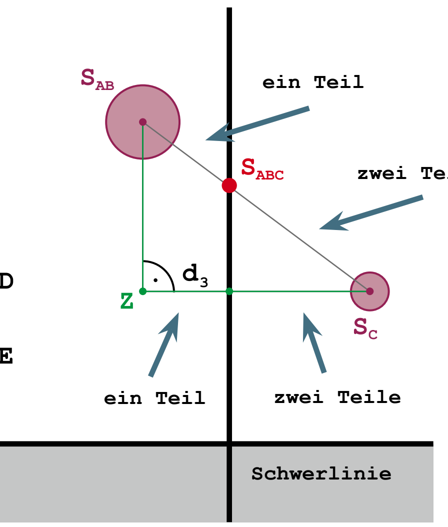
Der Quader B mit dem so aufliegenden Quader A wird nun möglichst weit nach links verschoben.



- Die zwei an A bzw. an B verschobenen Quader gelten jetzt als ein stufenförmiger Körper. Dessen Schwerpunkt und der Überhang d_2 vom Quader B sind aus Symmetriegründen leicht zu ermitteln: S_{AB} halbiert die Strecke $[S_A S_B]$ und $d_2 = \frac{1}{4} \cdot a$.

Der Quader C nimmt A und B im Huckepack mit





- Der Schwerpunkt S_{ABC} des treppenförmigen Gesamtkörpers muss näher am Schwerpunkt S_{AB} als an S_C liegen. Weil in S_{ABC} doppelt so viel Masse vereinigt ist wie in S_C, liegt der resultierende Schwerpunkt S_{ABC} doppelt so nahe an S_{AB} wie an S_C. Dieser Sachverhalt wird auch in der vorstehenden Figur darstellt.

- Die Figur rechts macht zudem deutlich, dass dieses Teilverhältnis wegen der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke auch in den waagrechten Kontaktflächen erhalten bleibt.

- Weil $\overline{ZS_C} = \frac{1}{2}a$ gilt, ist dann $d_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{6} a$.

- Wenn danach der Quader D so weit wie möglich nach links bewegt wird, wird gleichzeitig eine Treppe bewegt, in der sich der dreifach-Schwerpunkt S_{ABC} mit dem Schwerpunkt S_D vereinigt. Der daraus resultierende Schwerpunkt S_{ABCD} teilt die waagrechte Auflagestrecke im Verhältnis 1:3. Dann gilt für den vierten

  Überhang $d_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{8} a$.

- Wenn wir es mit n Quadern zu tun bekommen, dann ergibt sich für den

  Gesamtüberhang d_n: $d_n = \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

  Damit erscheinen in den runden Klammern die Summanden der divergenten Harmonischen Reihe.

- Einen Beweis für die Divergenz dieser Reihe findet man z. B. in

  http://matheraum.de/forum/Harmonische_Reihe/t429738

- Das bedeutet: Wenn wir beliebig viele Quadersteine verwenden, dann überspannt der Brückenbogen beliebig große Strecken. Solche Brücken heißen „freitragend". Das bedeutet aber gleichzeitig, dass beliebig viele aufgetürmte Quadersteine mit ihrer ganzen Länge über die unterste Standfläche hinausragen.

- Es erhebt sich die Frage: Wie viele Steine werden mindestens benötigt, bis der oberste Stein völlig über die Auflagefläche des untersten Steines hinausragt?
- Dann ist das kleinste n gesucht, für das gilt: $d_n > a$.

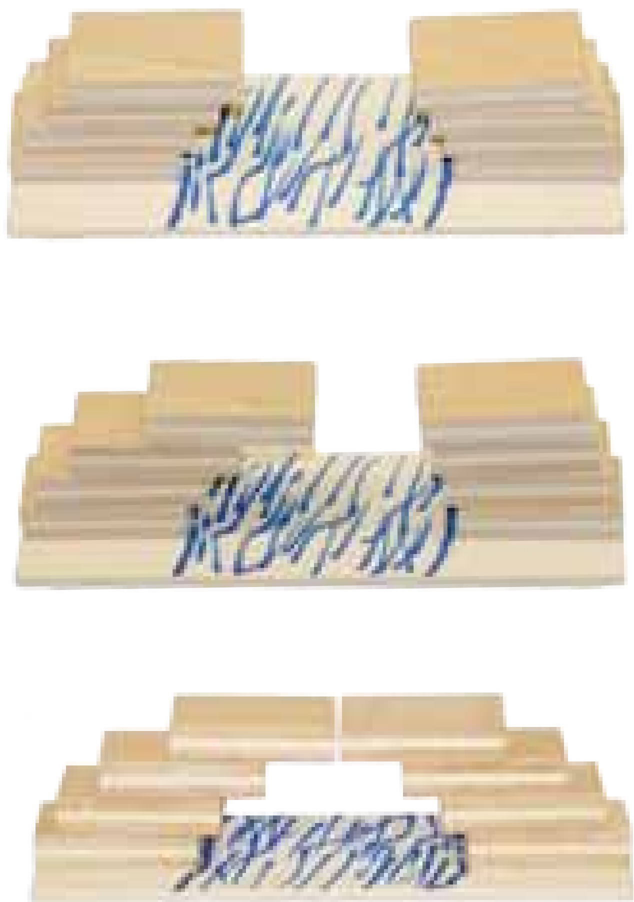
Also: $\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) > a$ d.h. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > 2$

oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > 1$

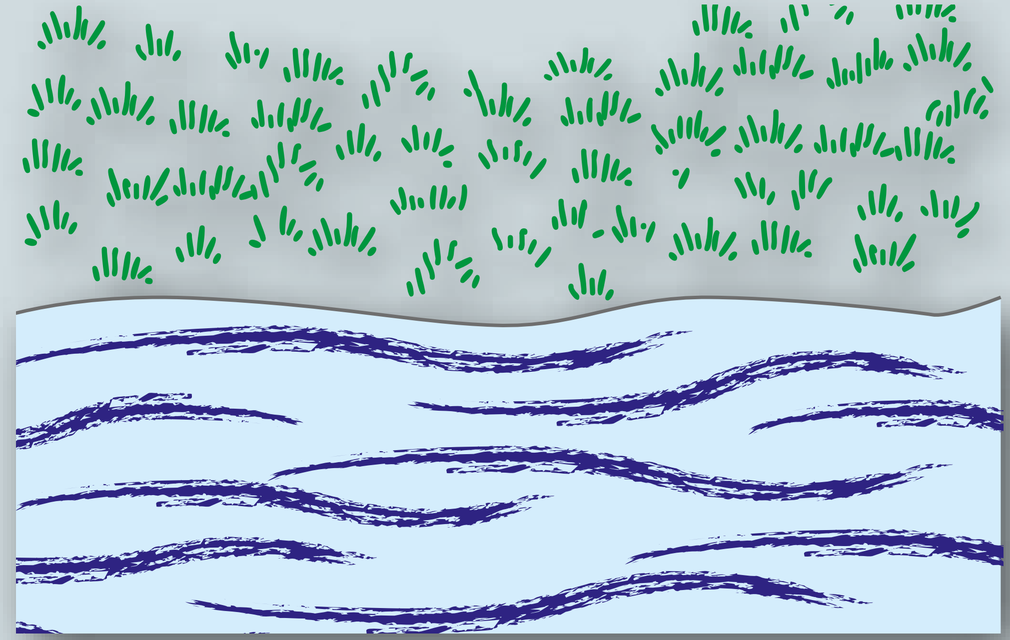
$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $0{,}5 + 0{,}\overline{3} < 1$ aber $0{,}5 + 0{,}\overline{3} + 0{,}25 > 1$

Also ragt im Idealfall bereits der 4. Quader total über die untere Auflagefläche hinaus.

Lösungsfoto



Die Geschichte vom Bauern Schlau



10

Material

- Kopiervorlage
- 3 Würfel
- Boot (z.B. Papierschiffchen)

Die Geschichte vom Bauern Schlau

Das Experiment

Bauer Schlau möchte mit seinem Boot einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf vom nördlichen ans südliche Flussufer befördern.

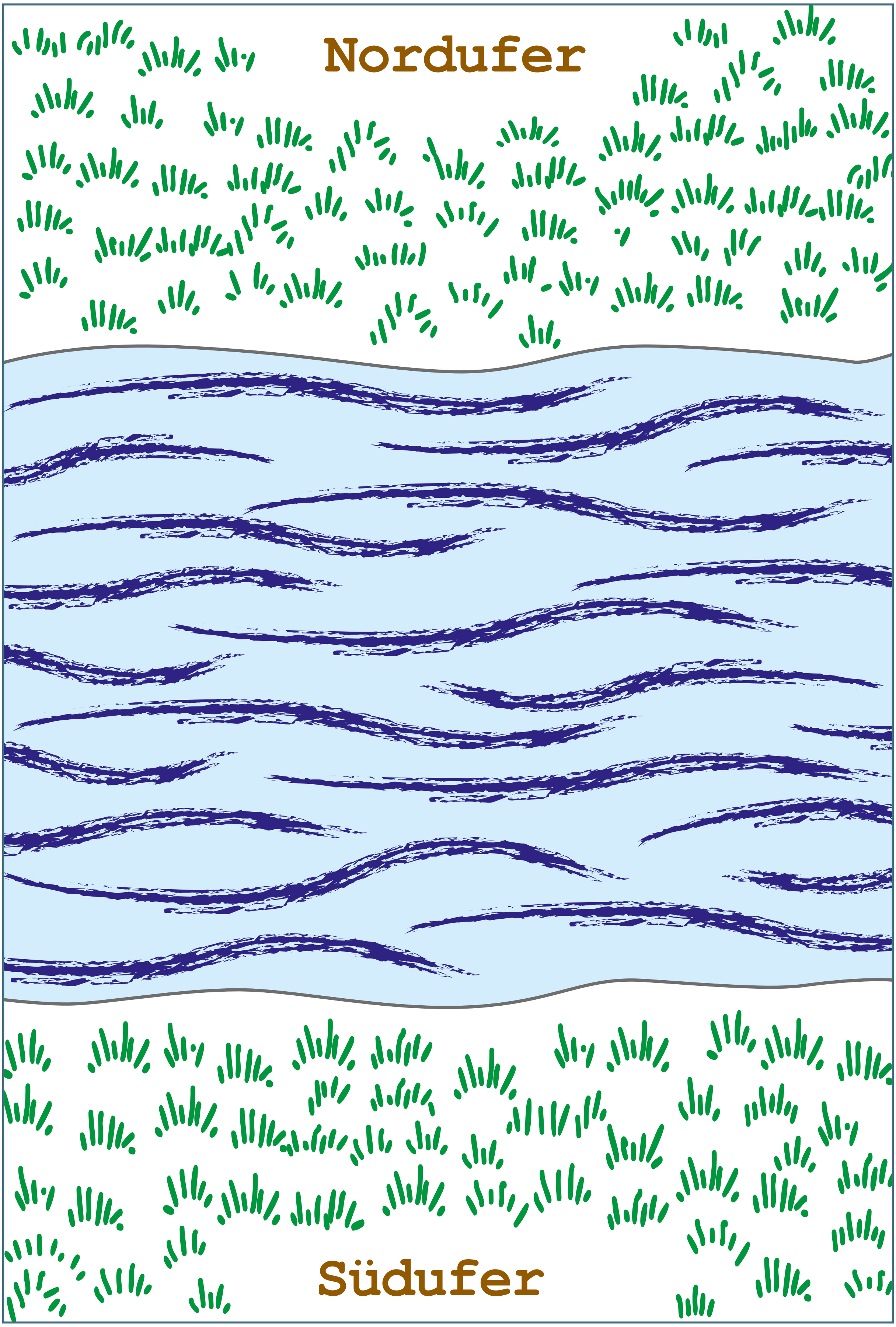
Sein Kahn ist aber so klein, dass er entweder nur den Wolf oder die Ziege oder den Kohlkopf einladen kann. Er muss dabei aber aufpassen, dass während einer Überfahrt die Ziege nicht den Kohlkopf oder der Wolf die Ziege frisst.

▸ Finde eine Lösungsmöglichkeit für Bauer Schlau.

Nordufer	W Z K						
Im Boot	↓ ?						
Südufer	?						

W – Wolf
Z – Ziege
K – Kohlkopf

Kopiervorlage



Lösungen

Material

- Kopiervorlage
- Beschrifte die 3 einzelnen Würfel mit W, Z und K.
- Boot (z.B. Papierschiffchen)

Didaktische Hinweise

- Die Geschichte wird durch ein Experiment verdeutlicht. Anschließend erfolgt deren Modellierung mit Hilfe einer Tabelle.
- In höheren Jahrgangsstufen bietet es sich an, die Vorgehensweise an den Eckpunkten bzw. Kanten eines Würfels graphisch darzustellen.

Eine Lösungsmöglichkeit

Nordufer	W Z K	*W K*	*W*	*W Z*	*Z*	*Z*	
Im Boot	↓ Z	↑	↓ *K*	↑ *Z*	↓ *W*	↑	↓ *Z*
Südufer		*Z*	*Z K*	*K*	*W K*	*W K*	*W Z K*

Ein geometrisches Modell zur Geschichte

Aus: I. Stewart: Die Reise nach Pentagonien: „Der Löwe, das Lama und der Lollo Riesa“, Berlin 1995;
Ian Stewart: Die Reise nach Pentagonien. 16 mathematische Kurzgeschichten.
Aus dem Amerikanischen übersetzt von Johannes Leckebusch, München (dtv 33014) 1998;
Pentagonien, Andromeda und die gekämmte Kugel: 50 mathematische Kurzgeschichten [Taschenbuch]

Wolf (W), Ziege (Z) und Kohlkopf (K) nennen wir „Objekte“.
Wir können die Position eines Objektes durch die Ziffern Null und Eins darstellen, wobei eine Null die Position auf der nördlichen und die Eins die auf der südlichen Seite des Flusses darstellt.
Zusammen mit dem Tripel (W, Z, K) können wir dann die momentane Position der Objekte eindeutig festhalten:

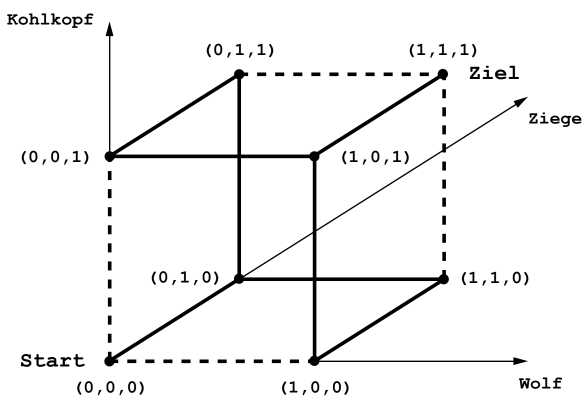
Beispiele: Startposition (0,0,0) Zwischenstadium (0,1,1), was bedeutet, dass sich Ziege und Kohlkopf am südlichen Ufer (unter momentaner Aufsicht A) befinden und Zielposition (1,1,1)

Eine mögliche Lösung: („A“ bedeutet „unter Aufsicht“)

(0,0,0) $\rightarrow$ (0,1,0) $\rightarrow$ (0,1,1) (A) $\rightarrow$ (0,0,1) (A) $\rightarrow$ (1,0,1) $\rightarrow$ (1,1,1)

Wie viele dreistellige Zahlen kann ich aus zwei verschiedenen Ziffern bilden?
Antwort $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Allerdings ist nicht jede dieser Möglichkeiten erlaubt.
Die acht Möglichkeiten lassen sich an den Eckpunkten eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE im dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen:

Die Fahrt von (0,0,0) nach (1,0,0) würde bedeuten, dass der Wolf übergesetzt wird, aber Ziege und Kohlkopf ohne Aufsicht sind. Daher ist diese Linie – wie auch andere, die verbotene Züge darstellen – gestrichelt gezeichnet.
Um vom Start zum Ziel zu gelangen, muss man den Punkt (0,1,0) ansteuern. Von da aus gibt es genau zwei zielführende Wege.



Eine Erweiterung

Angenommen, neben den drei Objekten tritt noch Godzilla (G) auf, der Löwen tötet, wenn nicht gleichzeitig ein Kohlkopf in erreichbarer Nähe liegt. Wir erhalten das Quadrupel (W, Z, K, G) und die erlaubten Bewegungen lassen sich auf den Kanten eines vierdimensionalen Würfels darstellen.

gefördert durch das 7. Rahmenprogramm
der Europäischen Kommission

SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Z-MNU

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

Werner Heubeck • Edgar Höniger

Mathematik

Ein Beutel voller Experimente