UNIVERSITÄT BAYREUTH

Didaktik der Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Prof. Dr. P. Baptist
SR W. Heubeck
RL E. Höniger

Fibonacci project

Experimentelle Mathematik

Die Stationen bieten Einsatzmöglichkeiten für:

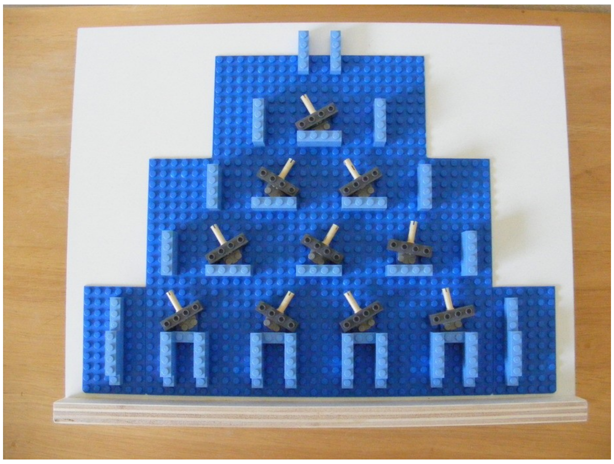
Vertretungsstunden
Nachmittagsbetreuung
Projekte

Die Stationen

1. Das Pascalbrett
2. Vom Pascalbrett zum Galtonbrett
3. Das Galtonbrett
4. Visuelle Kryptographie
5. Geheime Botschaften
6. Dreiecke
7. Vierecke
8. Das Dreiquadrat-Puzzle
9. Vergrößern und Verkleinern
10. Der verflixte Würfel
11.Die verflixte Pyramide
12. Die Brücke über den Main
13. Leonardos Brücke hält
14. 1-2-4-8-16- …
15. Drehende Tassen
16. Die Normalparabel bringt Produkte auf den Punkt
17. Pantograph
18. Turm von Hanoi
19. Geometriebrett
20. Kugelwettrennen

O1. Winkelspiegel 90°
O2. Winkelspiegel beweglich
O3. Tripelspiegel
O4. Kaleidoskop
O5. Strahlenverläufe bei Spiegeln
O6. Blick ins Unendliche
O7. Verzerrte Bilder
O8. Der schiefe Raum

1. Das Pascalbrett



Das Experiment

Lass 16 Kugeln (eine Kugel nach der anderen) durch den Schacht abwärts rollen und warte, bis alle das Brett durchlaufen haben und in irgendein Kästchen gefallen sind.

Zähle, wie viele Kugeln sich jeweils in einem Kästchen befinden. Notiere die Anzahl der Kugeln in der Tabelle deines Arbeitsblattes.

Verändere die Schalter beliebig und wiederhole das Experiment mehrmals.

Kommt dir diese Folge von Zahlen in der Tabelle bekannt vor?

Begründe, weshalb die Experimente gerade diese und keine andere Zahlenfolge liefert.

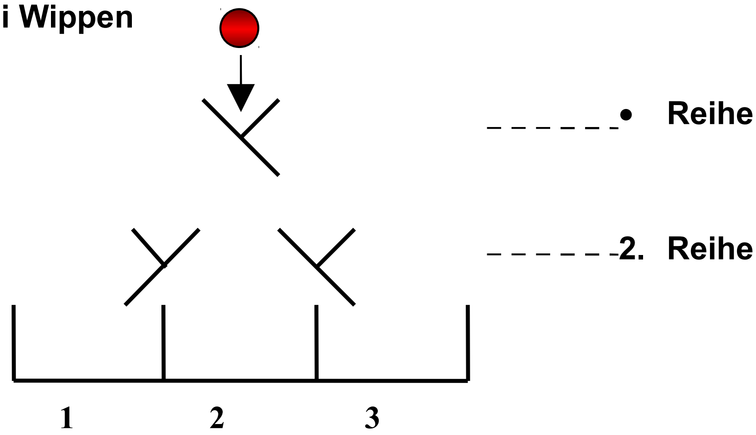
Blaise PASCAL (1623-1662), ein französischer Gelehrter, beschäftigte sich vor allem mit Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie mit der Mechanik der Flüssigkeiten und Gase.

Idee Pascal-Brett mit Lego vom Zentrum Mathematik der TU München
http://www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat/?v=rech

Das Pascal-Brett

Mathematische Überlegungen

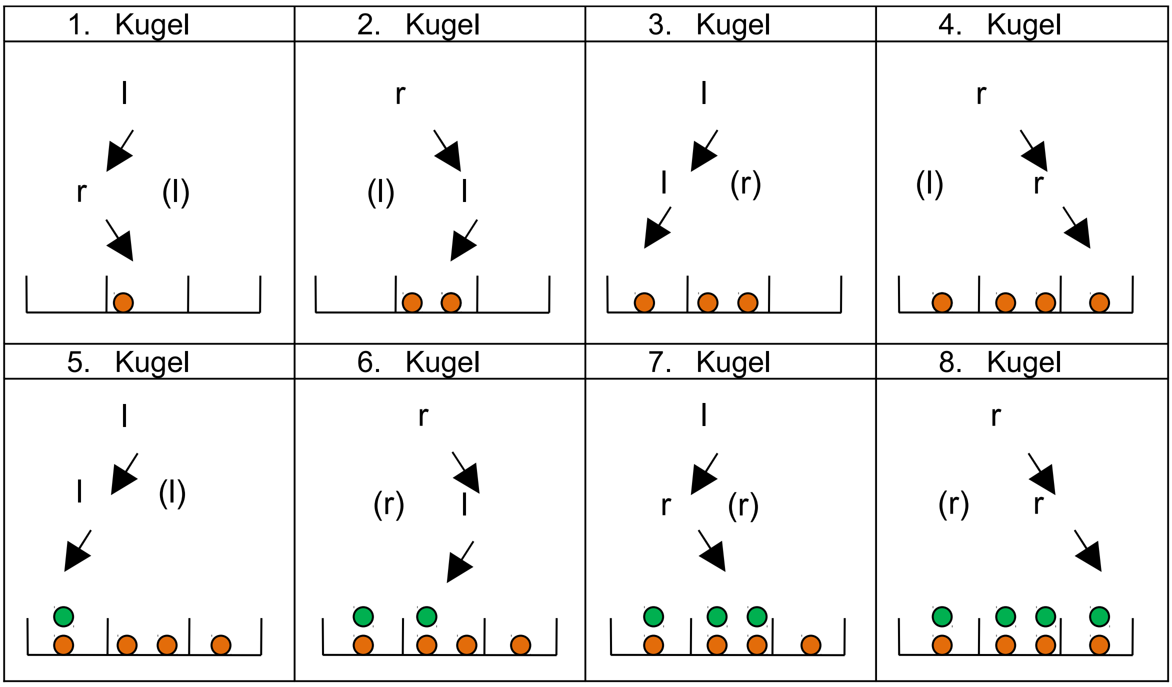
A. Die Kugel trifft auf drei Wippen



Wir experimentieren zunächst nur mit 3 Wippen in 2 Reihen. In der oben dargestellten zufälligen Ausgangsposition landet die Kugel im Fach 2. Um alle möglichen Ausgangspositionen systematisch zu erfassen, legen wir folgende Abkürzungen fest:

l: Die Wippe steht so, dass die Kugel nach **links** gekippt wird.
r: Die Wippe steht so, dass die Kugel nach **rechts** gekippt wird.
(l), (r): Die jeweilige Stellung der Wippe wird **beibehalten**, weil diese von der Kugel gemieden worden ist.

Wir starten mit der oben gezeigten Stellung der Wippen und zeichnen den jeweiligen Weg der ersten 8 Kugeln nacheinander auf:



Wir sehen:

Die 5. Kugel nimmt den gleichen Weg wie die 3. Kugel.
Die 6. Kugel nimmt den gleichen Weg wie die 2. Kugel.
Die 7. Kugel nimmt den gleichen Weg wie die 1. Kugel.
Die 8. Kugel nimmt den gleichen Weg wie die 4. Kugel.

Es genügt also, mit 4 Kugeln zu experimentieren, weil jedes weitere Viererpaket an Kugeln die 3 Fächer auf die gleiche Weise belegt:

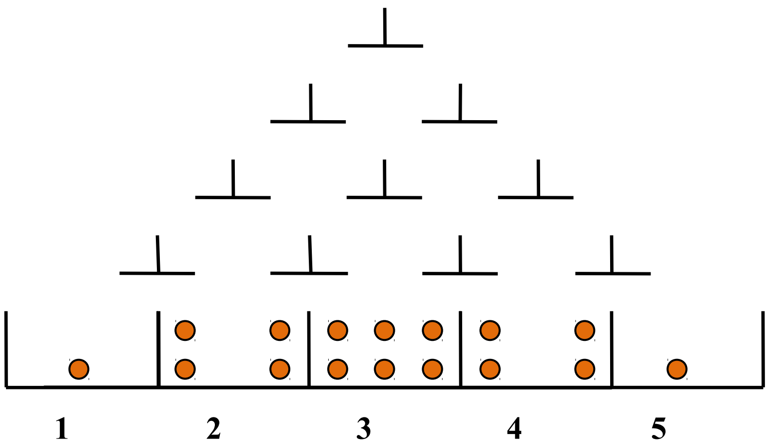
Fach	1	2	3
Anzahl der Kugeln	1	2	1

Für 2 Reihen von Wippen ergeben sich somit $4 = 2^2$ verschiedene Wege in die einzelnen Fächer. Diejenige Wippe, die von der jeweiligen Kugel gemieden wird, spielt auf dem betreffenden Weg keine Rolle. Es gibt vier verschiedene Wege mit dem Ziel „Fach 1“ oder „Fach 2“ oder „Fach 3“:

$l \rightarrow l \rightarrow$	Fach 1
$l \rightarrow r \rightarrow$	Fach 2
$r \rightarrow l \rightarrow$	Fach 2
$r \rightarrow r \rightarrow$	Fach 3

Jeder dieser Wege wird von einer der vier Kugeln durchlaufen.

Die 10 Wippen auf dem Pascal-Brett aus Lego-Steinen sind in 4 Reihen angeordnet. Die benötigten Kugeln verteilen in die 5 Fächer sich auf folgende Weise:



Begründung:
In das Fach 1 führt nur ein Weg: 4-mal „l“.

Der Weg in das Fach 2 führt über 3-mal „l“ und 1-mal „r“. In das Fach 2 führen somit 4 verschiedene Wege: l-l-l-r oder l-l-r-l oder l-r-l-l oder r-l-l-l.

Der Weg in das Fach 3 führt über 2-mal „l“ und 2-mal „r“. Dazu gibt es 6 verschiedene Wege: l-l-r-r oder l-r-l-r oder l-r-r-l oder r-r-l-l oder r-l-l-r oder r-l-r-l.
Rechnerisch lässt sich diese Anzahl z der Möglichkeiten für die Kugel, ins 3. Fach zu gelangen, so darstellen: Bilde aus 2 verschiedenen Buchstaben eine Kette aus 4 Buchstaben. Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich dann aus:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

An dieser Stelle sind wir fertig. Aus Symmetriegründen gibt es für das Fach 4 wieder 4 verschiedene Wege und für das Fach 5 nur einen Weg.
Insgesamt gibt es also $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$ verschiedene Wege, wenn die Wippen in vier Reihen stehen. Daher genügen hier 16 Kugeln.

Wenn wir systematisch die Anzahl der Wege in der 1. bis zur 4. Reihe untersuchen, dann erzeugt die entsprechende Verteilung das „Pascalsche Dreieck“:

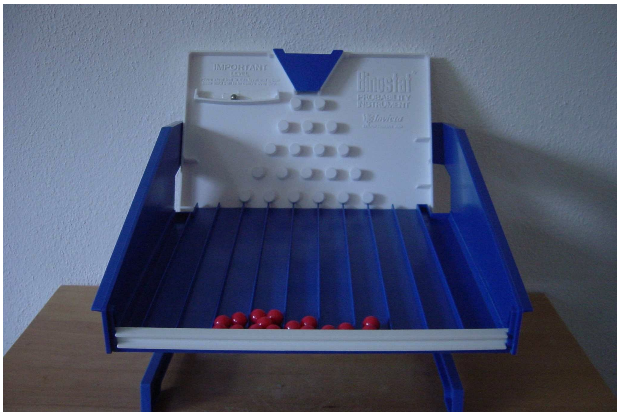
1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

2. Vom Pascalbrett zum Galtonbrett



Kontrolliere, ob das Galton Brett wie im Bild aufgebaut ist!

Lass 16 Kugeln aus dem Trichter abwärts rollen und warte, bis alle das Brett durchlaufen haben und in eines der unteren Kästchen gefallen sind.

Zähle, wie viele Kugeln sich jeweils in einem Kästchen befinden. Notiere das Ergebnis in einer Tabelle.

Lass zusätzlich 16 Kugeln aus dem Trichter abwärts rollen. Zähle und notiere wieder.

Wiederhole das Experiment mehrmals.

Weshalb nimmt die Zahl der Kugeln in den Kästchen nach rechts und links immer mehr ab?

Wahrscheinlichkeitsapparat Binostat (ca. 45€) von der Fa. Betzold (www.betzold.de)

<u>3. Das Galton Brett</u>

Das Experiment

Lass 16 Kugeln aus dem Trichter abwärts rollen und warte, bis alle das Brett durchlaufen haben und in eines der unteren Kästchen gefallen sind.

Zähle, wie viele Kugeln sich jeweils in einem Kästchen befinden. Notiere das Ergebnis in einer Tabelle.

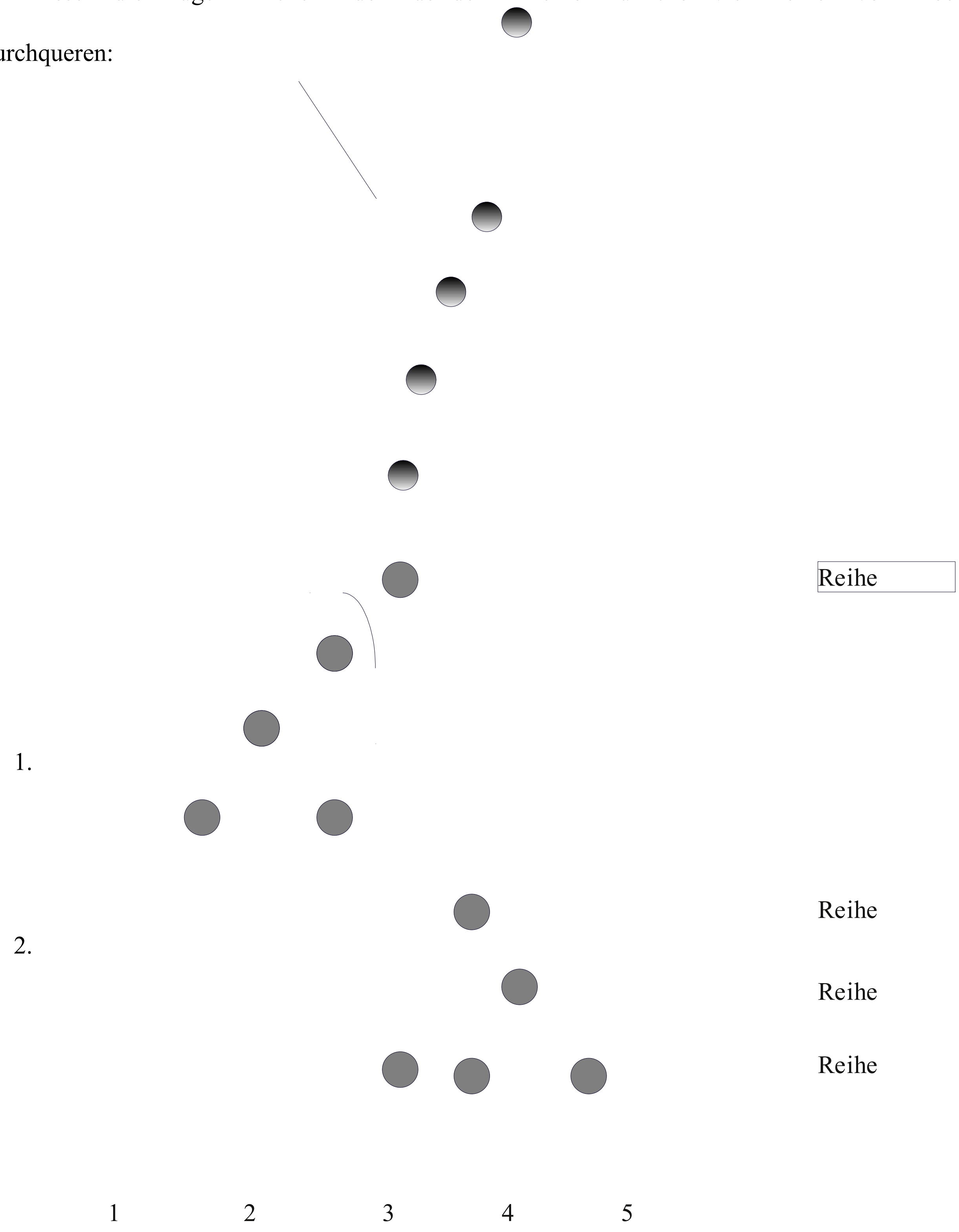
Lass <u>zusätzlich</u> 16 Kugeln aus dem Trichter abwärts rollen. Zähle und notiere wieder.

Wiederhole das Experiment mehrmals.

Weshalb nimmt die Zahl der Kugeln in den Kästchen nach rechts und links immer mehr ab?

Galton überlässt den Lauf der Kugel dem Zufall

Die geometrische Anordnung der Hindernisse für die Kugeln ist die gleiche wie beim Pascal-Brett. Allerdings stellen sich den Kugeln am Galton-Brett keine beweglichen Wippen, sondern starre Pfosten in den Weg. Dadurch ist einerseits die Ablenkung einer Kugel nach rechts („r“) oder links („l“) dem Zufall überlassen, andererseits ist der Weg einer Kugel nicht durch den der Vorgängerin festgelegt, sondern erneut zufällig.
Wir lassen die Kugeln nacheinander aus dem Trichter zunächst vier Reihen von Pfosten durchqueren:



In das Fach 1 gelangt eine Kugel nur, wenn sie den Weg l-l-l-l genommen hat.
Es gibt vier verschiedene Wege für die Kugel, um in das Fach 2 zu gelangen:
l-l-l-r
l-l-r-l
l-r-l-l
r-l-l-l
Das Fach 3 kann die Kugel auf sechs verschiedenen Wegen erreichen:

l-l-r-r	r-l-r-l
l-r-l-r	r-r-l-l
l-r-r-l	r-l-l-r

Aus Symmetriegründen führen wieder vier verschiedene Wege zum Fach 4 und nur ein Weg in das Fach 5.
Für alle Kugeln gibt es somit durch die vier Reihen 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 verschiedene mögliche Wege. Welcher davon aber jeweils durchlaufen wird, hängt vom Zufall ab.
Am Galton-Brett sollte also mit mindestens 16 Kugeln experimentiert werden.
Die Wahrscheinlichkeit w(n), mit der ein bestimmtes Ereignis, nämlich das Erreichen des Faches Nummer n eintritt, lässt sich nach Laplace auf die folgende Weise berechnen:
wn=Anzahl der günstigen FälleAnzahl der möglichen Fälle
Wir fassen die Ergebnisse, die 16 Kugeln am Galton-Brett liefern, in einer Tabelle zusammen:

Weg ins Fach Nr. n	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
Zahl der günstigen Fälle	1	4	6	4	1
Zahl der möglichen Fälle	16	16	16	16	16
w(n)	116	416=14	616=38	416=14	116
w(n) in Prozent	6,25	25	37,5	25	6,25

Folgerungen und Beispiele:

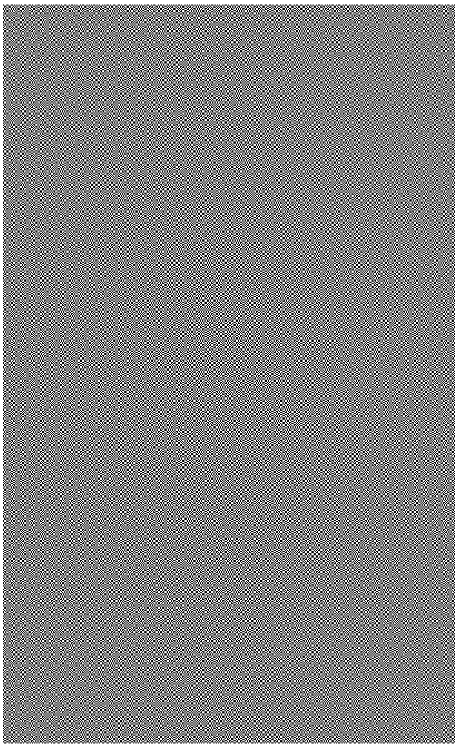
- Wenn die Pfosten auf dem Galton-Brett n Reihen bilden, dann gibt es 2^n verschiedene Wege in die (n+1) Fächer.
- Es streben mehr Kugeln in die zentralen Fächer als in die Randbereiche. Je größer die Anzahl der Kugeln ist, die im Spiel sind, desto schärfer zeichnet sich dieser Sachverhalt ab.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass z.B. eine Kugel im 2. oder im 3. Fach landet, beträgt
14+38=58=62,5% .
- Jeder Kugel landet mit Sicherheit in einem dieser 5 Fächer:

w(1) + w(2) + w(3) + w(4) + w(5) = 6,25% + 25% + 37,5% + 25% + 6,25% = 100%.

4. Visuelle Kryptographie

James Bond bekommt ein Geheimdokument

James Bond hat bei all seinen Aufträgen eine sogenannte Schlüsselfolie dabei. Seine Geheiminformationen bekommt er immer erst später in einem Brief per Post zugesandt. Gesucht wird eine gefährliche Person.



Das Experiment

Nimm aus dem Umschlag das Geheimdokument. Die geheime Nachricht kannst du entschlüsseln, indem du die Schlüsselfolie exakt auf das Geheimdokument legst.

Nimm die Informationsfolien mit den Geheiminformationen 1, 2, 3 und 4 und entschlüssele diese mit den Schüsselfolien A und B.

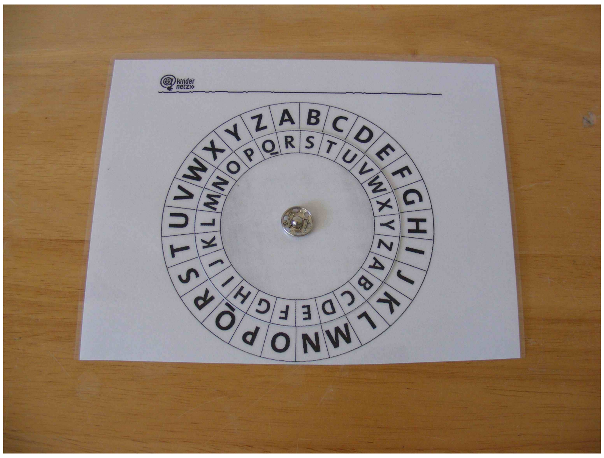
Erklärung:
(S. Rückseite)

Lege eine leere Informationsfolie (mit kleinen Quadraten) auf eine Schlüssenfolie A oder B. Erzeuge die Geheiminformation "L", indem du mit dem Faserschreiber die entsprechenden Quadrate ausmalst. Überprüfe dein Ergebnis mit der anderen Schlüsselfolie.

(Bildquelle: http://www.clubradiolive.de/)

5. Geheime Botschaften

(Die Cäsar-Scheibe)



Das Experiment

Funktionsweise aus „Kindernetz“ (http://www.kindernetz.de/):

„Die Buchstaben auf der äußeren Scheibe stellen das "echte" Alphabet dar. Mit der inneren Scheibe legst du dein Geheimalphabet fest.
Soll dein Geheimalphabet zum Beispiel mit einem "D" beginnen, drehst du die innere Scheibe so, dass das "D" unter dem "A'" der äußeren Scheibe zu liegen kommt.
Dadurch wird das "B" zum "E", das "C" zum "F", und so weiter... Du darfst nur nicht vergessen, dem Empfänger deiner Nachricht zu sagen, mit welchem Buchstaben dein Alphabet beginnt!
Um die Geheimbotschaft zu entschlüsseln musst du die Buchstaben dann genau umgekehrt zuordnen. Aus dem "geheimen E" wird ein "B", aus dem "geheimen F" wird ein "C", und so weiter...“

Entschlüssele folgenden Satz mit dem Schlüsselbuchstaben D:

GDV JHOG LVW LO GHU GRVH

Schreib dir einen Satz auf und verschlüssele diesen.

Kopiervorlage:

http://www.kindernetz.de/infonetz/thema/geheimschriften/-/id=25340/property=download/nid=22494/1vpb4gn/index.pdf

Geheime Botschaften

Caesar-Verschiebung

Der römische Feldherr Julius Caesars

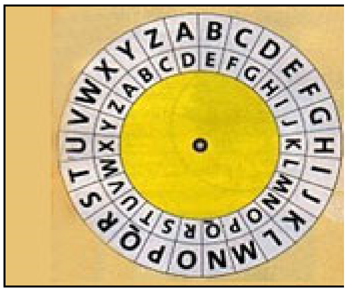
Der römische Feldherr Julius Caesar hat vor über 20 Jahren eine sehr sichere Verschlüsselungs-Methode erfunden. Dafür benötigte er das Alphabet und ein zusätzliches Geheimalphabet.

Auf diesem Wege wurden in erster Linie militärische Botschaften weitergegeben. Da der Bote nichts mit d Buchstabensalat anfangen konnte, bestand keine Gefahr, dass außer dem Empfänger noch jemand vo Inhalt der Nachricht erfuhr.

Da das Geheimalphabet als sehr sicher galt, wurde diese Verschlüsselungs-Metho in der Antike sehr häufig benutzt. Caesar soll übrigens auch seine Liebesbriefe an Cleopatra mit Hilfe dieses Geheimalphabets verschlüsselt haben!

Die Caesarverschiebung ist einfach anzuwenden und trotzdem sehr schwer zu knacken: Das Geheimalphabet unterscheidet sich vom normalen Alphabet darin, dass alle Buchstaben um eine bestimmte Anzahl von Stellen verschoben werden. Die Abfolge des Alphabets wird dabei nicht verändert.

Nur wer weiß, um wie viele Stellen das Alphabet verschoben wurde, kann die Botschaft lesen. Mit Hilfe der so genannten Caesarscheibe lässt sich eine Nachricht ganz einfach verschlüsseln!



Caesars Geheimalphabet: Di Caesar-Scheibe.

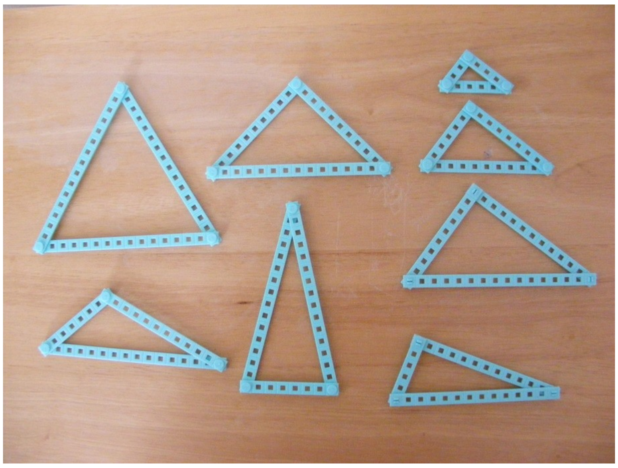
Autorin: Sandra Goller

Letzte Änderung am 14. August

Links zum Thema

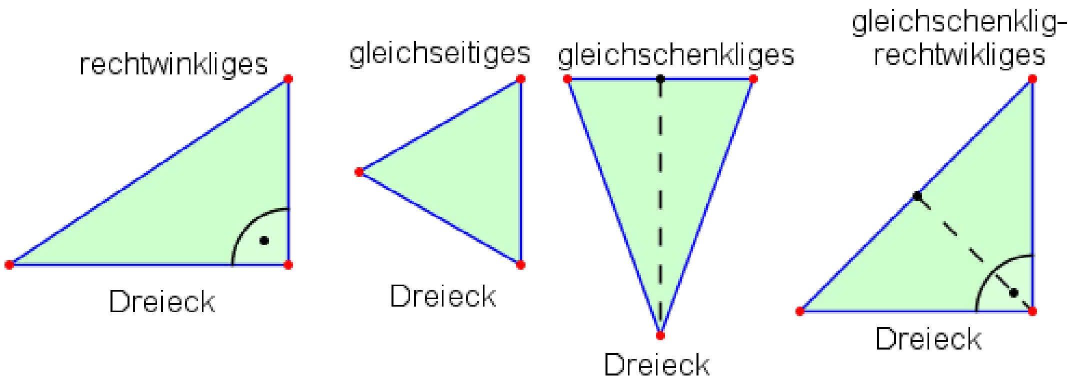
Die Caesar-Scheibe zum selber basteln (ca. 150,3 kB)
http://www.kindernetz.de/infonetz/thema/geheimschriften/-/id=25340/property=download/nid=22494 1vpb4gn/index.pdf

6. Dreiecke



Das Experiment

Ordne die verschiedenen Dreiecke den Bildern in der Vorlage zu.



Nimm zunächst ein blau gekennzeichnetes rechtwinkliges Dreieck.

Bestimme mit dem Lineal die Entfernung der schwarz markierten Mittelpunkte der Clips.

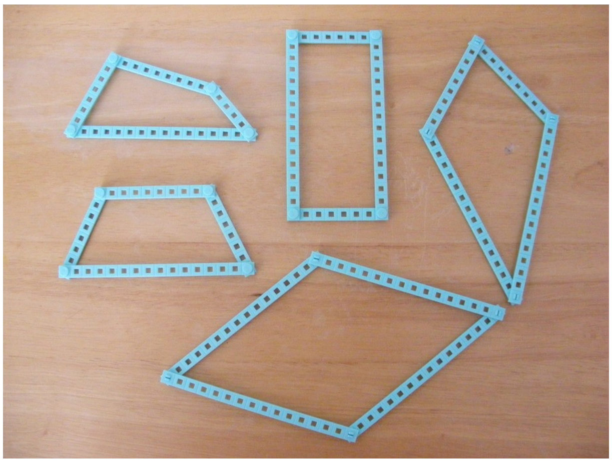
Berechne von jeder der drei Maßzahlen das Quadrat. Welchen Zusammenhang erkennst du?

Wiederhole das Experiment mit den anderen beiden farbig gekennzeichneten rechtwinkligen Dreiecken. Gilt der Zusammenhang auch hier?

Gilt deine Vermutung auch für das rot markierte Dreieck?

Material:
www.traudl-riess.de

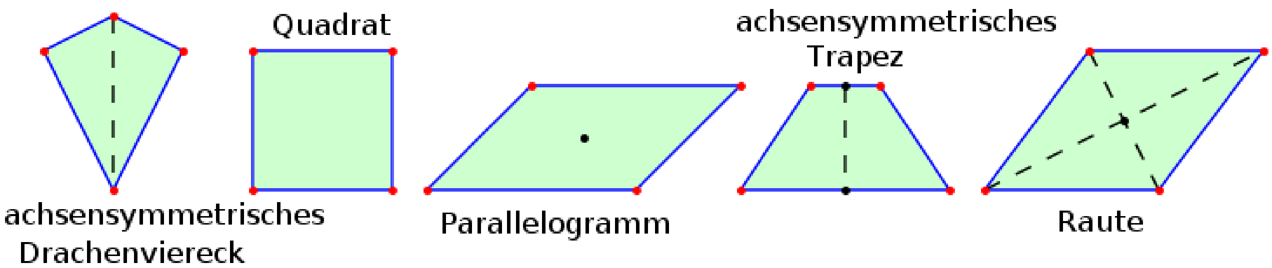
7. Vierecke



Das Experiment

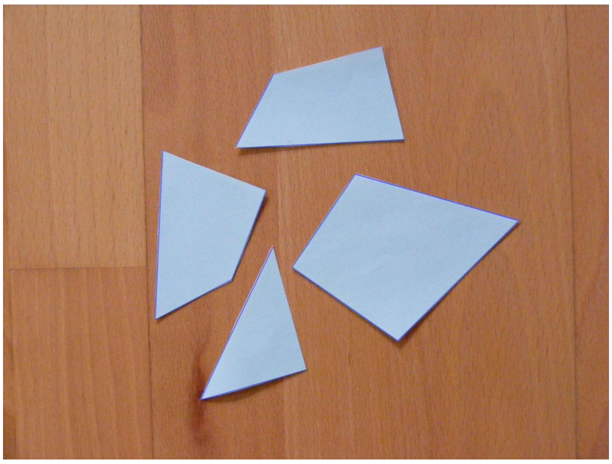
Welche besonderen Vierecke kannst du mit dem blau gekennzeichneten Viereck einstellen?

Welche besonderen Vierecke kannst du mit dem rot gekennzeichneten Viereck einstellen?



Material:
www.traudl-riess.de

8. Das Dreiquadrat-Puzzle

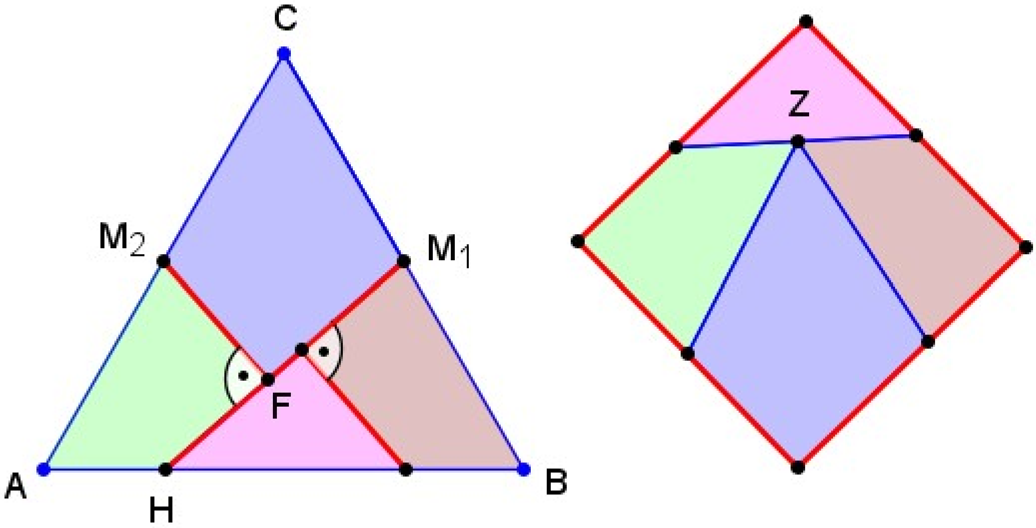


Das Experiment

Füge aus den vier Einzelteilen ein gleichseitiges Dreieck und anschließend ein Quadrat zusammen.

<u>Das Dreiquadrat-Puzzle</u>

Mathematische Überlegungen



Das gleichseitige Dreieck ABC wird so zerschnitten, dass in seinem Inneren die Scheitel von vier rechten Winkeln erzeugt werden, die nach der Verwandlung zu den Eckpunkten des Quadrates werden. Gleichzeitig fügen sich die drei 60°-Winkel des gleichseitigen Dreiecks im Inneren des Quadrates am Punkt Z zu einem gestreckten Winkel zusammen.

Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge a und das Quadrat mit der Seitenlänge HM1=x haben den gleichen Flächeninhalt:

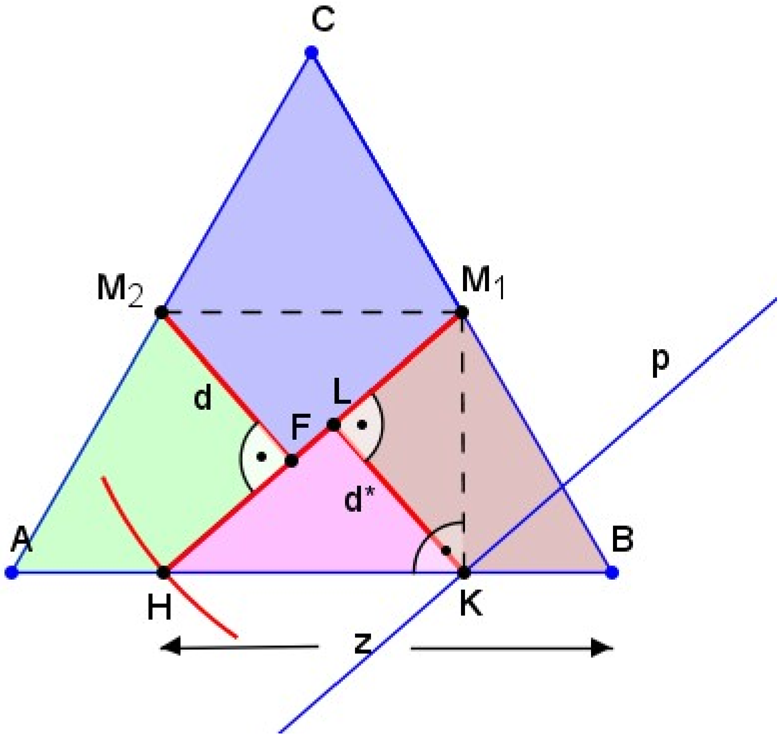
a243 = x2 x= a243 .

Die Seitenlänge x ließe sich z.B. auf die folgende Weise konstruieren:

- Im Höhensatz des Euklid wählt man die Hypotenusenabschnitte 1 LE und 3 LE. Dann hat die betreffende Höhe im Thales-Halbkreis die Länge 43.
- Um die gesuchte Quadratseite x z.B. für a = 6 cm zu erhalten, müsste man die Länge dieser Höhe noch verdreifachen.

Wollte man jedoch die zugehörigen Konstruktionslinien noch an das gleichseitige Dreieck ABC binden, dann ging die Übersichtlichkeit verloren.

Daher ist es einfacher, z.B. für a = 6 cm die Streckenlänge x ≈ 5,264 cm näherungsweise zu berechnen und dann so vorzugehen:



Der Kreis um den Seitenmittelpunkt M_1 mit dem Radius x schneidet [AB] im Punkt H. Vom Seitenmittelpunkt M_2 aus wird das Lot [M_2F] auf die Strecke [HM_1] gefällt.

Die gestrichelten Hilfslinien machen deutlich, dass die Dreiecke HKM_1 und FM_1M_2 zueinander ähnlich sind:

M1KM1H=FM2M1M2 a43x= da2 . Mit x= a243 ergibt sich d=a443=x2 = d*.

Also sind die Dreiecke HKL und FM_1M_2 kongruent und es gilt: HK=a2 .

Die Parallele p zur Strecke [HM_1] im Abstand d = d* scheint die Strecke [AB] ebenfalls im Punkt K zu schneiden. Zur Überprüfung dient der Kosinussatz im Dreieck HBM_1. Mit HB=z gilt:

x2=z2+a22-2za2cos60°

a243=z2 + a24-az2

Die quadratische Gleichung hat wegen z > 0 nur die Lösung z=a41+43-3.

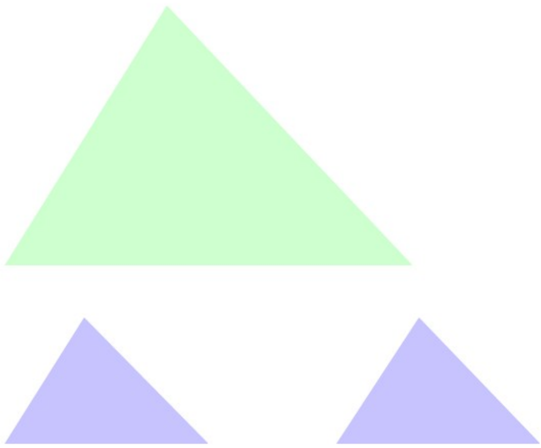
Dann ist KB=z-a2=a41+43-3-2=a4(43-3-1).

Schon hier erkennt man, dass KB=a4 ausgeschlossen ist.

In der Tat gilt 43-3-1=0,981969… . KB weicht also von a4 um knapp 2% ab, ein Unterschied, der z.B. für a = 6 cm mit dem bloßen Auge nicht erkennbar ist.

Für die Herstellung des zugehörigen Puzzles genügt jedoch die sehr gute Näherung AH=KB=a4 (eine Zerlegung, die auf H.E. Dudeney (1847-1930) zurückgeht), weil die physischen Unzulänglichkeiten von Geodreieck, Zirkel und Schere die mikroskopische rechnerische Abweichung überlagern.

9. Vergrößern und Verkleinern

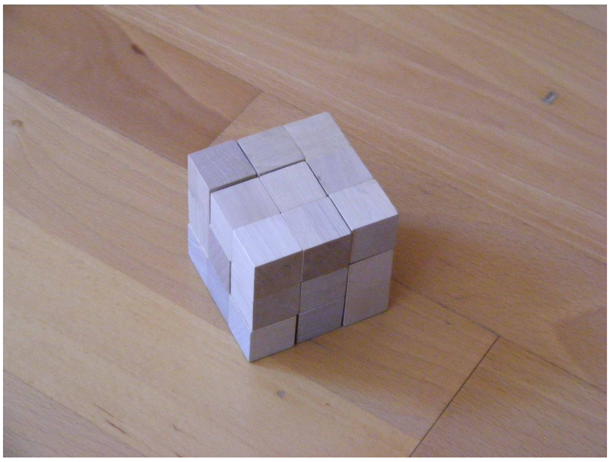


Das Experiment

Die beiden kleinen Dreiecke sind deckungsgleich. Beim großen Dreieck sind die entsprechenden Seiten doppelt so lang wie bei den kleinen Dreiecken.

Wie viele von den kleinen Dreiecken benötigst du, um damit das große Dreieck lückenlos zu bedecken?

10. Der verflixte Würfel



Das Experiment

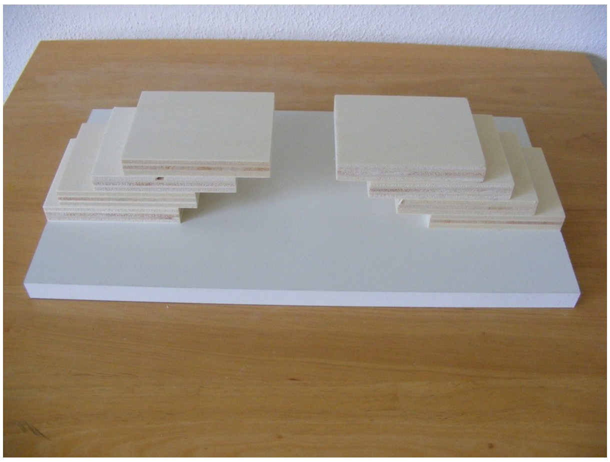
Baue den Würfel nach.

11. Die verflixte Pyramide

Das Experiment

Baue die Pyramide nach.

12. Die Brücke über den Main

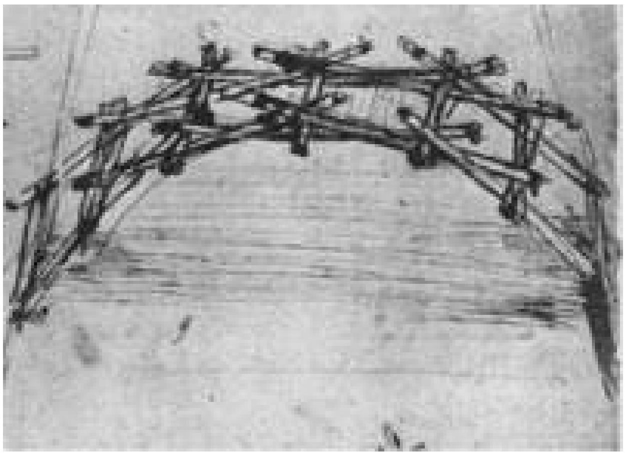


Das Experiment

Baue mit den Brettern eine Brücke (siehe Bild) so, dass sich die Brücke schließt.

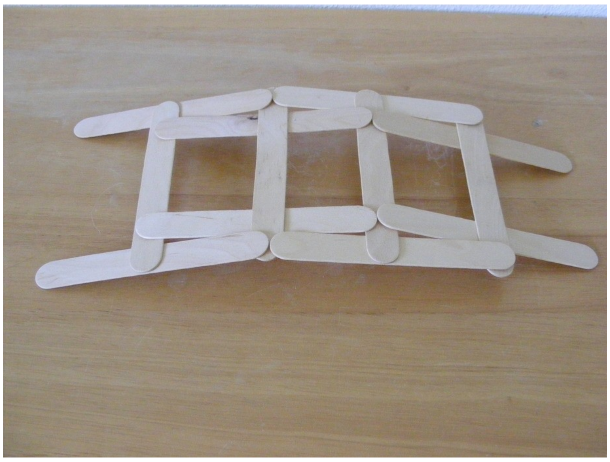
Wie weit können die Brückenteile überstehen?

13. Leonardos Brücke hält



Quelle:

http://www.lise-meitner-schule.de/img/bilder/leonardo2_2.jpg



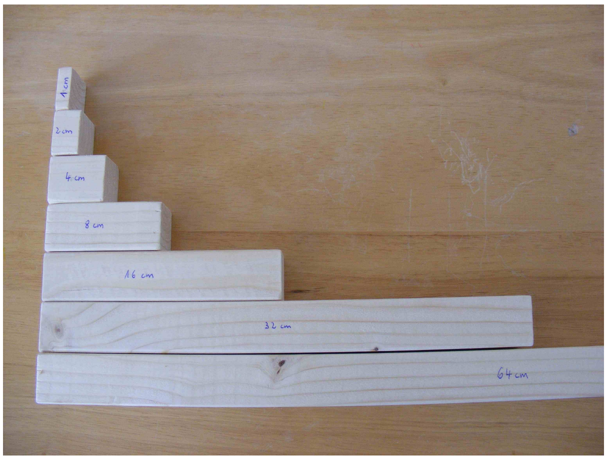
Das Experiment

Baue die Leonardo - Brücke nach.

Leonardo da Vinci (1452-1519) war ein italienischer Maler, Bildhauer und Architekt. Er beschäftige sich häufig mit der Planung und Konstruktion technischer Geräte, z.B. Flugapparate, Druckpumpen und Brennspiegel.

Material:
Holzspatel in Apotheken erhältlich

14. 1-2-4-8-16- ...



Das Experiment

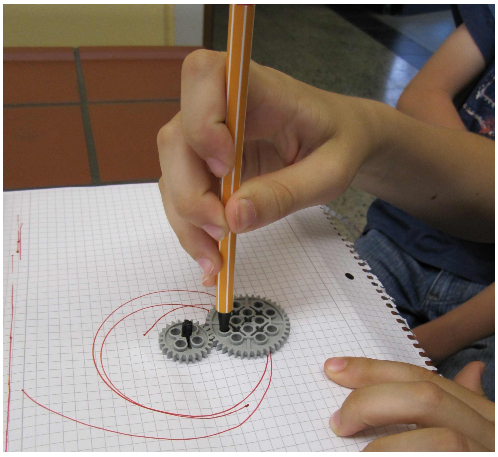
Lege die Holzklötze so aneinander, dass folgende Streckenlängen entstehen:

3cm, 5cm, 7cm, 10cm, 15cm, 27cm und 83cm

Welche größte Streckenlänge kannst du mit den Klötzen erzeugen?

15. Drehende Tassen

(Kurven zum Schwindligwerden)



(linkes Bild: Freizeit-Land Geiselwind 2010)

Das Experiment

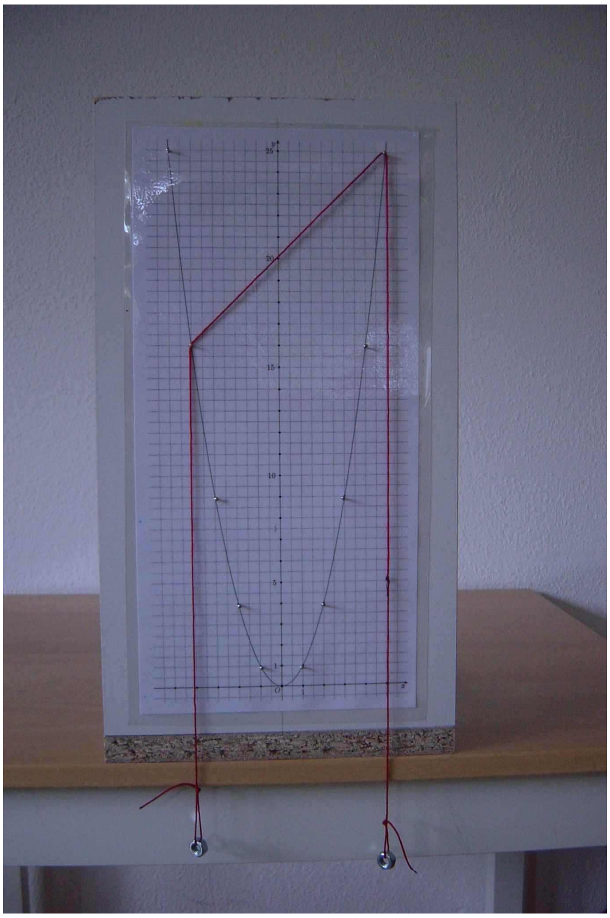
Ziehe vorsichtig das kleine Zahnrad in der Mitte von der Achse. Lege ein Blatt Papier (unten bündig) auf das Brett und drücke die Achse durch das Papier. Stecke das kleine Zahnrad wieder auf die Achse.

Zeichne mit Hilfe des Stiftes und der anderen Zahnräder Kurven.

Lass ein Zahnrad an der Zahnradstange abrollen und zeichne mit Hilfe des Stiftes wieder Kurven.

Entferne dein bemaltes Blatt.

16. Die Normalparabel bringt Produkte auf den Punkt



Das Experiment

Aus zwei Faktoren a und b kannst du dir den Produktwert $a \cdot b$ an der Normalparabel zeigen lassen.

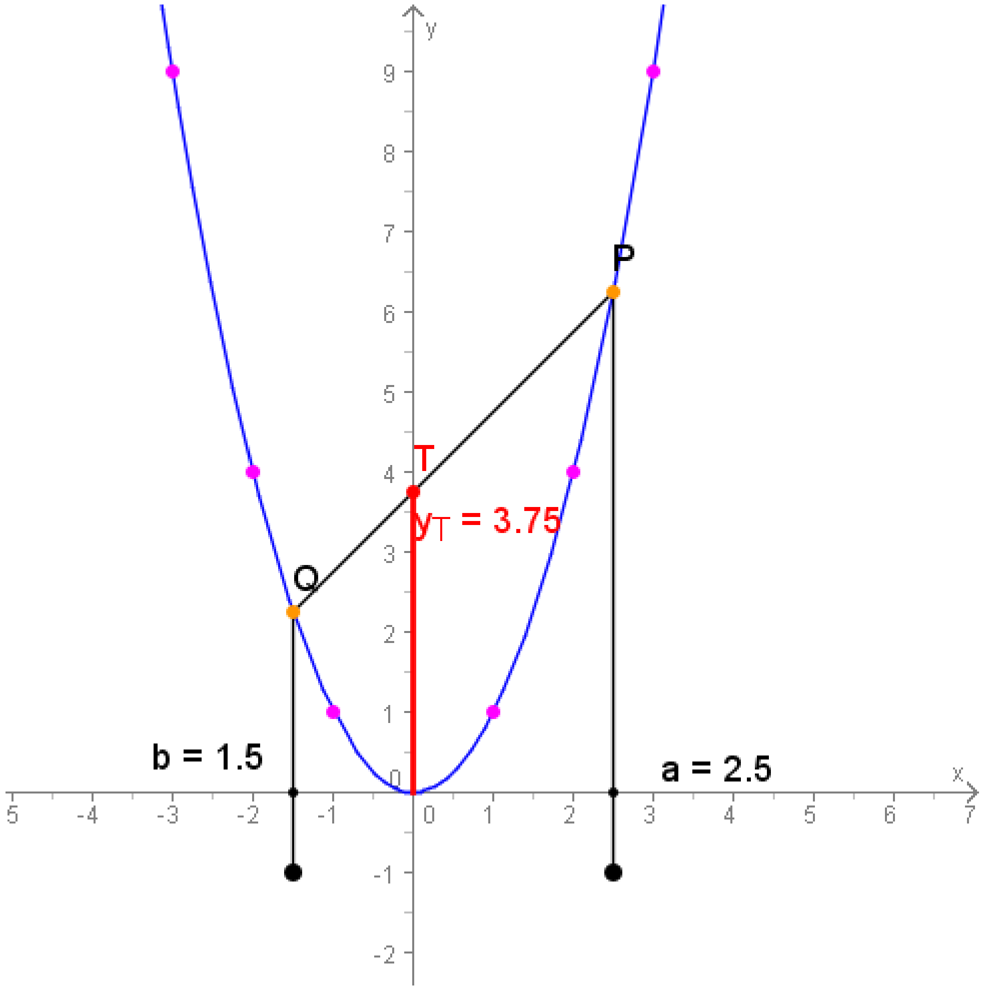
Stelle am geeigneten Aufhängepunkt mit dem rechten Lot auf der x-Achse den Faktor a (z.B. a = 3) ein.

Stelle am geeigneten Aufhängepunkt mit dem linken Lot den Faktor b (z.B. b = 2) ein. Das Fadenstück zwischen den beiden Aufhängepunkten der beiden Lote schneidet die y-Achse am Produktwert $a \cdot b$.

Zeige, dass bezüglich der Multiplikation das Kommutativgesetz gilt.
Experimentiere mit weiteren Faktoren a und b.

Die Normalparabel bringt Produktwerte auf den Punkt

Aus zwei Faktoren a und b kannst du dir den Produktwert a · b zeigen lassen:



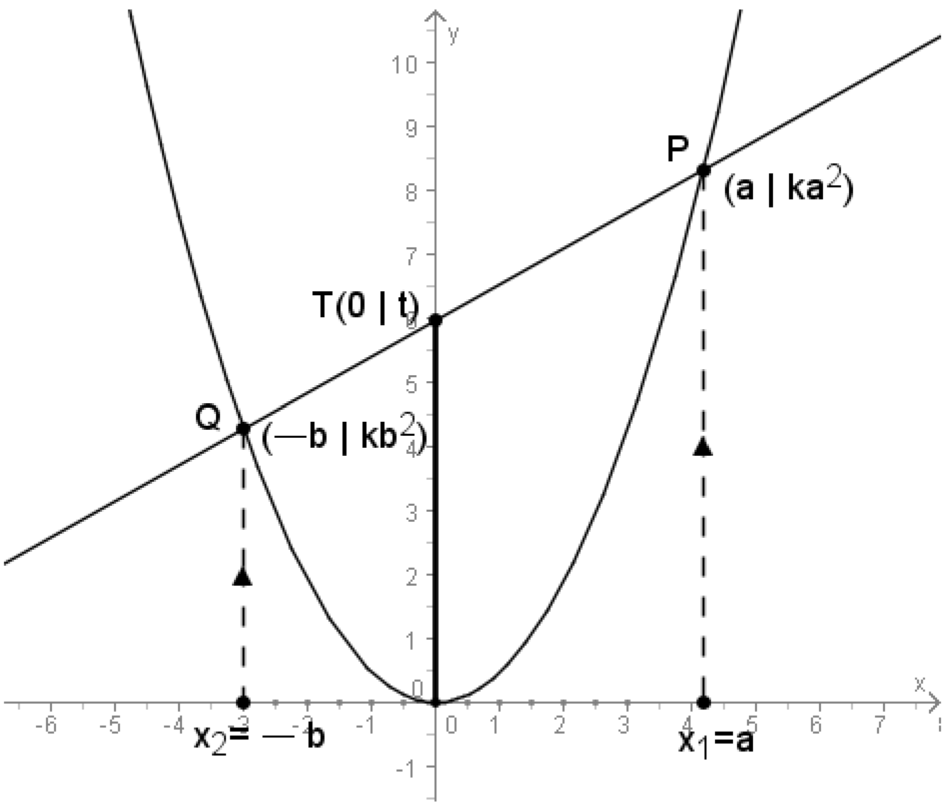
- Stelle mit Hilfe des rechten Aufhängepunktes P den Faktor a = 3 auf der x-Achse ein.
- Stelle mit Hilfe des linken Aufhängepunktes Q den Faktor b = 2 auf der x-Achse ein.
- Das Fadenstück [PQ] schneidet die y-Achse im Punkt T. Lies den y-Wert des Punktes T ab. Was stellst du fest?
- Zeige jetzt, dass bezüglich der Multiplikation das Kommutativgesetz gilt.
- Experimentiere weiter.

Die Normalparabel bringt Produktwerte auf den Punkt

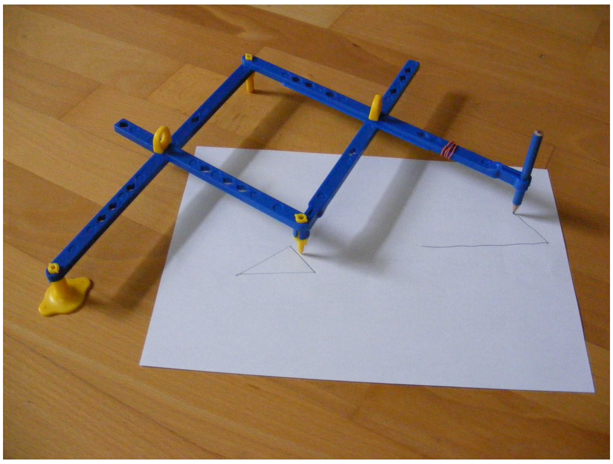
a				
b				
y_T				

Das Rechengesetz heißt:

Ergebnis:



17. Pantograph



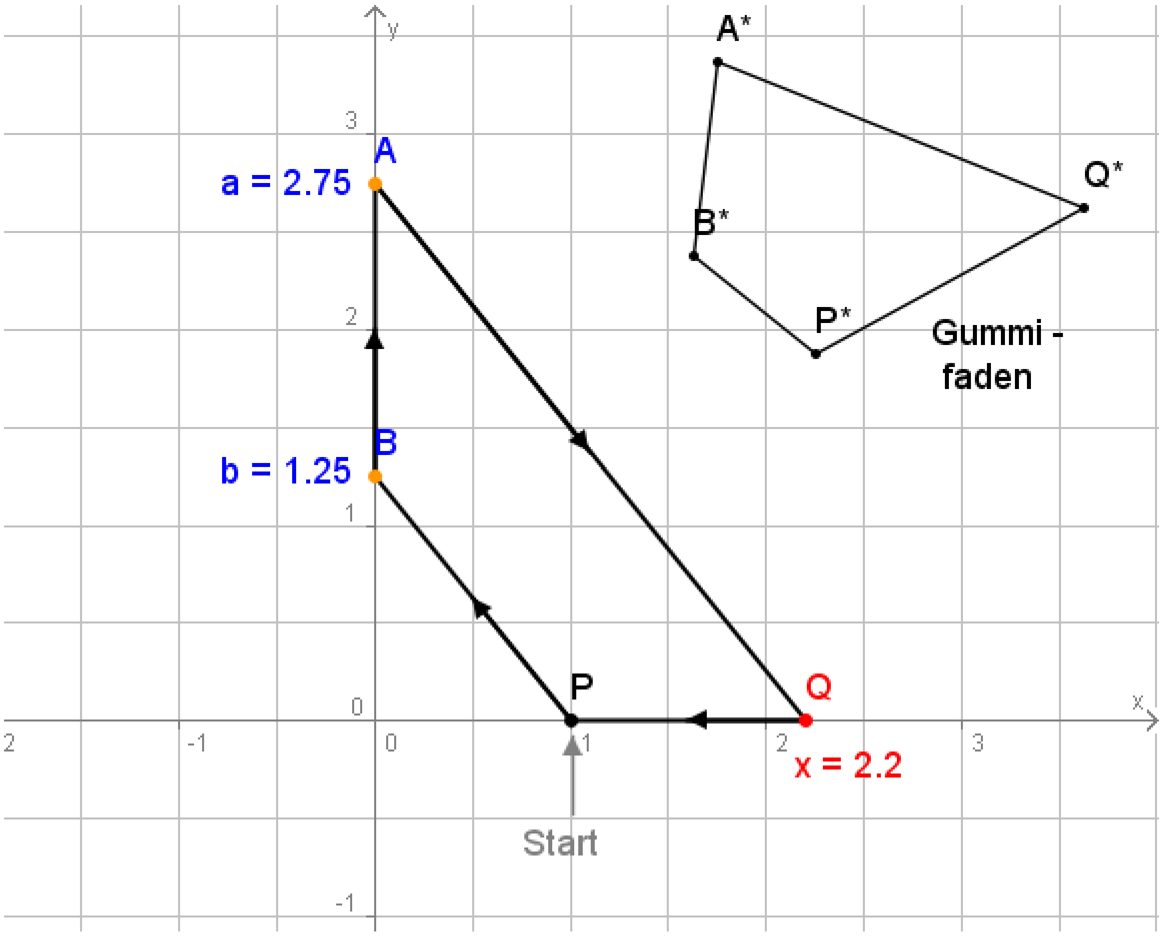
Das Experiment

18. Turm von Hanoi

Das Experiment

19. Geometriebrett

Quotientenwerte laufen parallel



Aus zwei Zahlen a und b kannst du dir den Quotientenwert $\frac{a}{b}$ zeigen lassen:

- **Beispiel: Führe den Gummifaden von Punkt P (1|0) zum Punkt Q(2|0), weiter zum Punkt A(0|3) und schließlich so zum Punkt B, dass die Strecken [BP] und [AQ] parallel liegen.**
- **Welcher Zusammenhang zwischen dem Werten a und b sowie dem x-Wert des Punktes Q vermutest du?**
- **Wiederhole das Experiment für a = 1,5 und b = 0,5. Gilt deine Vermutung von vorhin noch?**
- **Experimentiere weiter.**

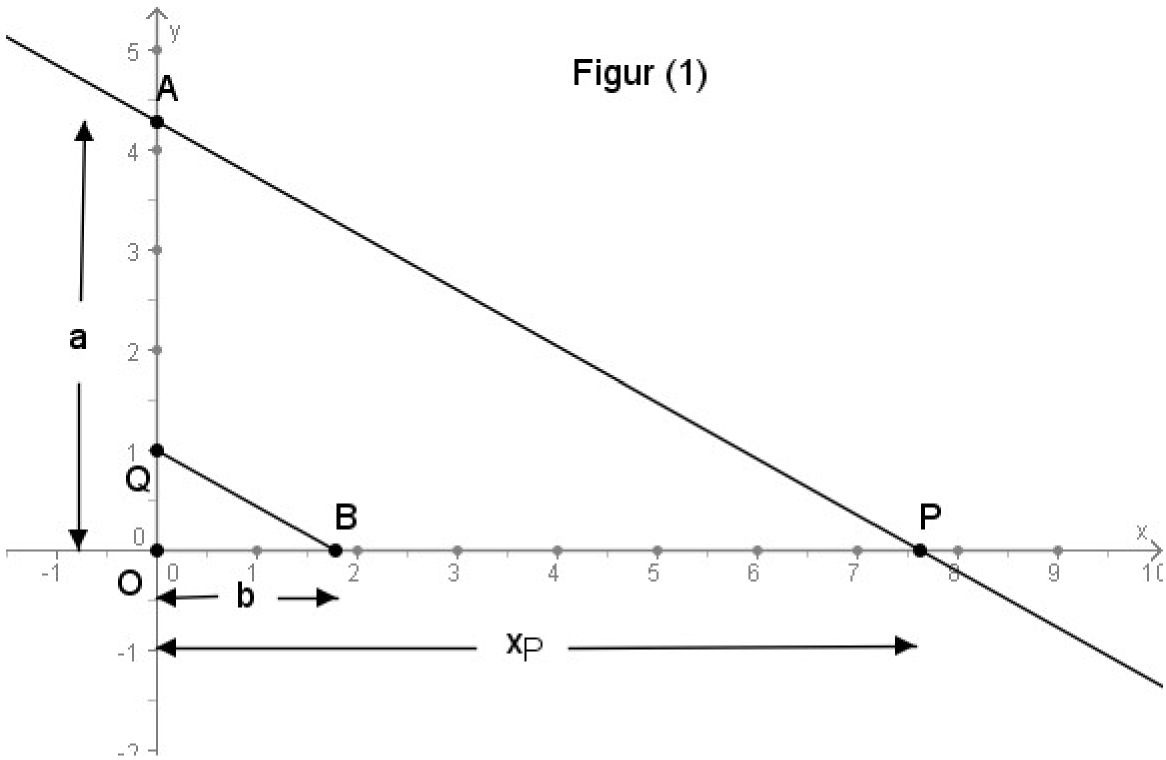
Produktwerte laufen parallel

a				
b				
x_P				

Das Rechengesetz heißt ______________________________

Ergebnis:

Begründung:



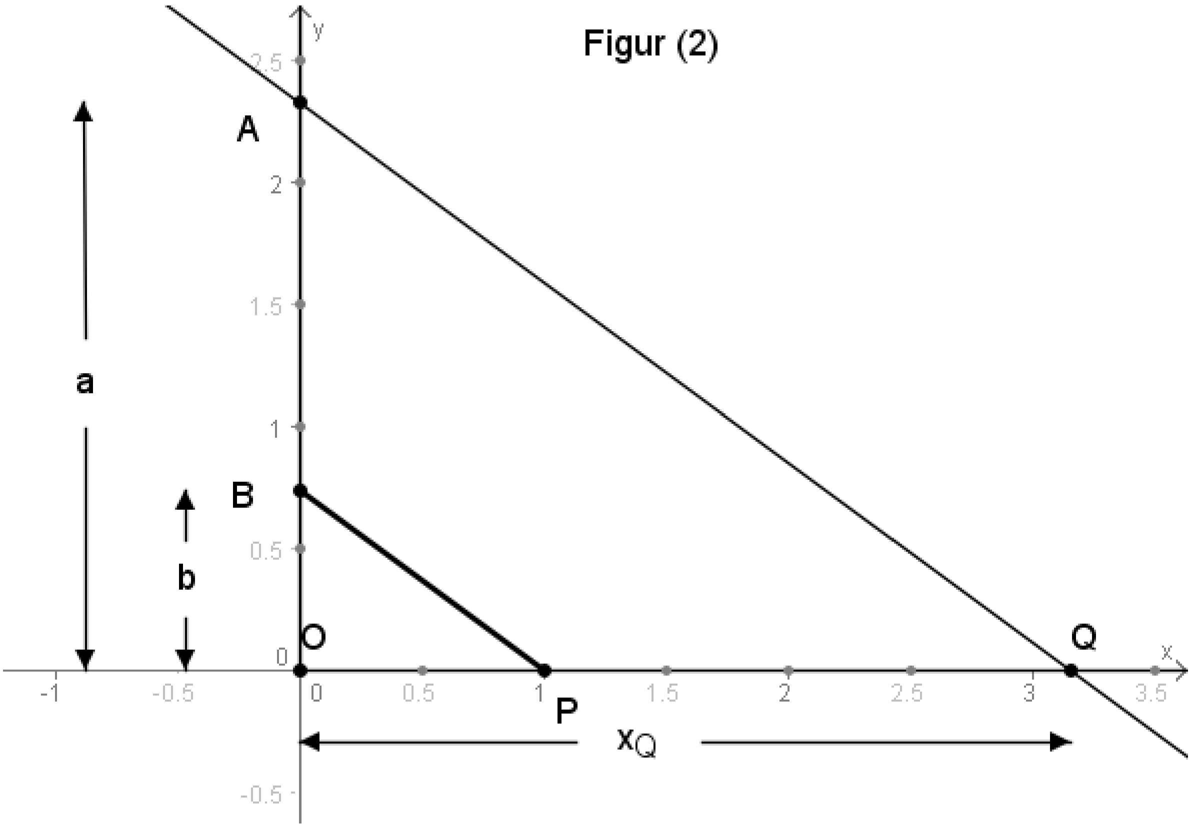
Quotientenwerte laufen parallel

a				
b				
x_Q				

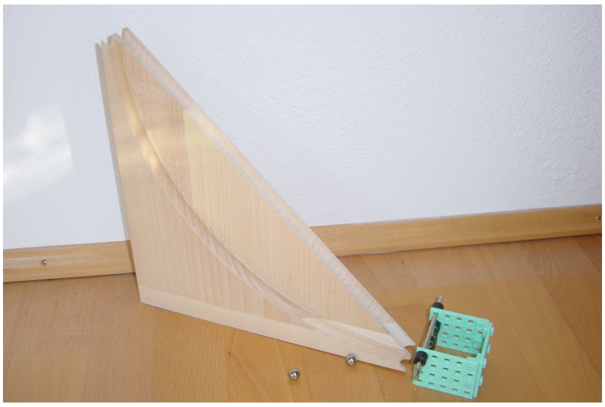
Zusammenhang:

Herleitung:

Figur (2)



20. Kugelwettrennen



Das Experiment

Lasse die zwei Kugeln auf ihrer Bahn auf der gleichen Höhe los. Was kannst du beobachten?

Lass die Kugel auf der vorderen gekrümmten Bahn an einer beliebigen Stelle und gleichzeitig die Kugel auf der hinteren Bahn von ganz oben los. Was kannst du beobachten?